高等学校教学用书·理论物理基础系列教程

2

分析力学

〔日〕 小出昭一郎 著

鲍 重 光 译

喀 兴 林 校

北京师范大学出版社

原　序

物理学是理工科学生必不可少的基础课之一．因为理工科任何专业的基础必然与物理学有密切关系．理工科学生要想在学习专业课之后，再自学物理学，很难获得令人满意的结果．就是说，必须在大学一、二年级扎扎实实地掌握物理学的基础知识．

这样，最重要的就是同学们要有积极的学习热情．同时，需要有一本向学生们传授物理学知识、指导学生学习方法的入门书．这套《理论物理基础系列教程》正是为了起到以上作用而编辑的，这套书的编辑方针与以往教科书有很大差别．

力学和电磁学是所有与物理学有关的重要学科的基础．因此，大部分学校要在低年级学完此课程．但象流体力学则可以作为选修课开设，也可以由同学们自学．另外，还需要有大学二年学历能够阅读的、内容充实的量子力学和相对论等教材．

编者基于这种观点，选择了物理学的基础课．编写了《理论物理基础系列教程》，这套丛书共10册．包括《力学》、《分析力学》、《电磁学》(上、下)、《量子力学》(上下)、《热力学与统计力学》、《弹性体与流体》、《相对论》及《物理用数学》等八个科目．所有这些科目不全是（日本）大学一、二级的课程，但各科目可以各自独立学习，力争做到大学一年或二年级的学生能够读懂．

在物理学教材中，往往有很多公式和现象，在期末考试之前，学生们常常要死记硬背，这不但掌握不了物理现象的本质，反而产生厌恶情绪．我们对这套教程的读者所应考虑的最重要问题，不是死记公式和现象，而是学会掌握事物本质的能力．

物理学相信一切事物都源于少数基本事实，而它们又遵循少

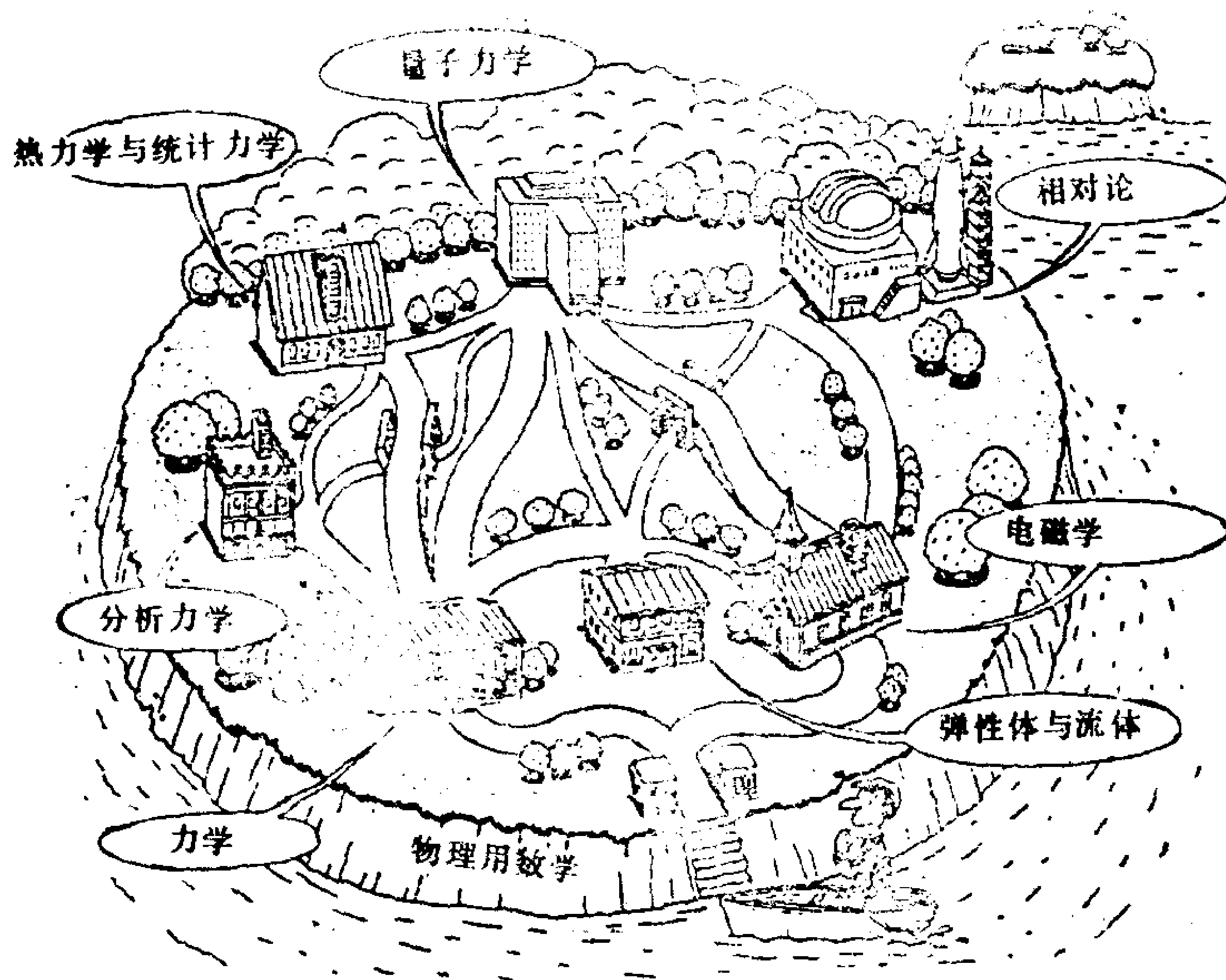
数基本定律，物理学求得这些定律. 这些明确的基本事实和定律一定有助于同学们理解，在彻底理解的基础上，同学们通过自己亲身的努力去摸索事物的本质，这就是所谓的"物理学的思考方法".

不仅限于物理学，科学的每个领域，都要探求事物的本质，但由于物理学发展的比较早，基础部分成熟，可以看做一个典型例子. 因此，掌握"物理学的思考方法"的能力，不仅对于将来钻研物理学的同学们，而且对于研究其它领域的同学都应该说是大有好处的.

在日常生活中，我们经常无意识地使用象时间、空间、力、压强、热量、温度、光等这样的物理学基本概念，物理学对这些日常使用的概念又重新给予了严格的定义，并与基本规律联系起来，物理学这样繁杂正是同学们厌烦的原因之一. 但是，如果想根据基本事实和规律探索事物的本质，即使是日常感知的事物. 也有必要详细弄清其实验的根据，重新明确与基本规律的关系，何况还涉及到超过我们日常体验的领域. 例如，处理原子内部问题时，甚至有必要提出似乎与常识和直观相矛盾的新概念. 因为物理学根据实验和观测不断扩大我们的经验世界，所以与其这样，倒不如改变常识和直观更有必要.

正如这样，用"物理学的思考方法"考虑事物，决不是很容易的事情. 但是，如果采用正确的方法，是有可能掌握的. 本教程的撰稿者们力求做到精选内容，所选的素材力争讲述通俗易懂，便于掌握. 希望读者们和作者一起探求事物的本质. 这样一来，自然而然地就能够学会"物理学的思考方法". 各卷篇幅都不大，不需要其它参考书就能读懂，但决不是简单的物理学摘要. 希望读者认真阅读.

如上所述，因为各科目基本上可以独立阅读，所以根据需要，从哪个科目开始阅读都可以. 但是，作为基本联系，可用图解的形式表示各科的相互关系.



从图的前面向里延伸的宽路，表示传统的路线，窄路则表示做为相关联的学科，可以共同阅读．例如，《弹性体与流体》是集中了现代风格的弹性力学和流体力学的，但与《电磁学》中的场的概念相关联．而作为场的经典理论，又可以与《相对论》加以对比，这一卷的波动部分，对于《量子力学》的理解也有帮助．另外，每卷都广泛涉及到数学，为不脱离物理学本身，同时阅读《物理用数学》是大有益处的．在整理这套《理论物理基础系列教程》之际，编者阅读了全卷的原稿，并向执笔者提出了各种要求，再三改稿．另外，不断采用了执笔者们的相互意见和岩波书店编辑部所提出的见解．今后在听取读者意见的同时，将进一步加以修正．

编者　户田盛和

中嶋貞雄

1982年8月

译者序

这套《理论物理基础系列教程》是根据日本岩波书店1982—1984年出版的《物理入门コーす》(物理学入门教程)翻译而成．原教程的主编者是户田盛和与中嶋貞雄．本书在日本颇受欢迎，在全套书出齐之前，先出的几本已经重印了三四次．中译本根据我国习惯，定名为《理论物理基础系列教程》．

这套《系列教程》共十本，计有《力学》、《分析力学》、《电磁学》(上下)、《量子力学》(上下)、《热力学与统计力学》、《弹性体与流体》、《相对论》和《物理用数学》．各册篇幅不大，自成体系，而十本合起来又构成一个完整的整体．本书的起点相当低，有我国工科一年物理课基础的读者即可学习．但其达到的深度并不低，大体上只略低于我国综合性大学的理论物理各课的大纲要求，而在广度上则广于后者，并含有较多新鲜内容．

本书富有日本教材所独有的风格和特点：选材精炼；讲解简练而明快又不失科学性；系统经过精心安排，组织周密，突出重点，深入浅出．在引导读者逐步掌握正确概念方面有其独到之处，书中不乏精辟的论述和精采简捷的推导与证明，在不知不觉之中把读者带到较难深的境界．本书是我国高等学校理论物理较好的教学参考书，师范院校和成人教育院校可以直接采用作为课本．本书也是中学教师进修、工程技术人员知识更新和知识青年自学的理想读物．

本书的翻译工作由喀兴林、王锡绂、梁绍荣和任萍四人组成工作小组负责，他们担任组织译校、联系出版、保证译文质量和其它各项事务工作．本书的译校人员以北京师范大学和东北师范大学的人员为主，他们大多数都具有高级职称及多年的日文经

历．翻译工作以忠于原作为原则．

由于我们学识有限，加之译校人员众多，译文中容或有不当之处或彼此不甚统一之处，敬请各界读者指正，以便再版时修改．

喀兴林

1988年6月

前 言

经典力学的基础方程是质点的牛顿运动方程$F=ma$．对于行星的运动和抛物体那样的场合，它可以原封不动地使用．但欲将其应用于更一般的力学体系时，不下一番功夫就不能最终解决问题．因此，本教程中确定了在第一卷《力学》中叙述的应用于“刚体”的方法和第八卷《弹性体与流体》中对“流体”的处理方法．与此相对，在本书中所处理的分析力学，不是象刚体力学或流体力学那样按照处理对象的性质来分类的．其对象是一般性的，方法是“分析的”、考察的，重点放在怎样数学化地描述系统的运动以及如何便于计算上．

为了描述运动，需要作为时间函数而变化的“坐标”．分析力学的最重要之处就是离开正交直线坐标（笛卡尔坐标）而自由地选定尽量方便的变数．这就是拉格朗日的广义坐标．在这样选择变数时，运动方程将变成怎样的形式？由于坐标的选取方法不同，方程的形式不同，每个问题一个个地考虑、推导，将是非常麻烦的．能将这样费功夫的工作一次完成，提供万能的、一般的处理方法的是拉格朗日方程．拉格朗日方程的优越之处在于只要选择适当坐标的话，在此之后就能够完全“机械式的”进行计算．在物理学当中最为困难的事情之一是在将自然现象数学形式化时，应当选择什么样的表示方法才好。拉格朗日的方法对力学轻易地闯过了这个难关．这才是利用数学的手段而“节约了思考”的典型的例子，它受到厄恩斯特·马赫的称赞也是自然的．

然而，尽管说不管怎么机械式地使用都可以，但是象精确度极高的计算机那样，完全不懂道理地使用的话就会感到困难，发

生意想不到的错误．本书第一章的主要目的是说明如何由牛顿方程导出拉格朗日方程，在牢固地理解这一点之后，第二章涉及拉格朗日方程的实例，需要熟悉它们，达到自己能自由地使用的地步．

与这样将实用置于重点的拉格朗日力学相比，在第三章和第四章中展开的各种理论，毋宁说是形式上的议论，从解决力学问题的观点看，非常缺乏实用性．说不定对天文学的精密计算有用处，除去那样一部分专门的场合，可以说几乎没有什么实际的效益．但是，重新估价力学这个学科体系的逻辑框架，在构成经典力学，统计力学和量子力学间的桥梁方面，这样的考虑方法在历史上起过极重要的作用．在这个意义上，对于今后希望稍稍专门地学习物理学的人来说，是必须同时通过的关口．

在最后第五章，讨论再度回到具体的问题，采用的方法也是第一章和第二章中所展开的拉格朗日方程．读者即使略去第三章和第四章，从第二章进到第五章，也完全能够理解．在运动当中具有非常重要的微振动一般性理论在各个方面也有广泛的应用，所以，有志于工科和化学的读者，也希望务必以第五章为主进行学习．

当本书动笔时，就打算沿着这个教程的宗旨，使说明尽量明瞭易懂，尽可能用具体例子．但是，无奈拉格朗日和欧拉建立分析力学的目的是对于具体东西省去种种物理的(Physical)思考的劳累，使讨论更加畅快而数学化．所以，怎么也无法在内容上避免有许多形式的、数学的东西．考虑到读者要不停留在《力学》而进展到《分析力学》，具有习惯这种分析方法的愿望，所以若能够允许到目前这种程度的话，那将是十分荣幸的．马赫的“使用数学是为了思考的节约”的考虑方法，对于学文科的人来说说不定是不合情理的，然而这确实是正确的．此外，充分抽象和能见到数学形式的表现，如果能习惯的话，也将带有恰如其分的具体

性．对于不习惯的人来说，就连地图也是抽象的，即使看了也似乎不明白是什么．

有些地方插入的小故事是从科学史上摘下来的．知道在建立合理主义的结晶那样的物理学之时，西欧的人们与“神”是怎样决战的，那也是很有意思的．

谨对详细阅读本书原稿，给予许多有益指教的本教程编者户田盛和、中嶋貞雄两位先生表示深切的感谢．

小出昭一郎

1982年6月

理论物理基础系列教程
（共10册）

1 力学
2 分析力学
3 电磁学（上）
4 电磁学（下）
5 量子力学（上）
6 量子力学（下）
7 热力学与统计力学
8 弹性体与流体
9 相对论
10 物理用数学

目　录

第一章　广义坐标和拉格朗日方程

为了描述力学体系的运动，往往使用其它变数较之于正交直线坐标（笛卡儿坐标）更为方便．在这样的场合，拉格朗日方程是非常有用的．这是由于可以不必为矢量化为分量形式的方法去费脑筋，就可机械地列出方程．本章的目的就在于弄清楚，怎样由牛顿运动方程导出这种便利而且实用的处理方法．

§1-1　平面极坐标

让我们从最简单的、单个质点的平面运动开始讨论．表示质点位置的最普通的是使用**正交直线坐标**（也叫**笛卡儿坐标**）的方法；如果是平面的情形，能确定x轴和y轴的话就可以了．这样一来，设质量为m，力的x、y分量分别为F_x、F_y时，牛顿运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y \tag{1.1}$$

如果力是具有势能$U(x, y)$的保守力，则可表示为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial x},\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial y} \tag{1.2}$$

在熟知的抛物运动的场合，除非特殊情况，将坐标轴取在水平方向和铅直方向是方便的．若取水平方向为x轴；铅直向上方向为y轴时，可以表示为$U=mgy$；因为不包含x，所以$F_x=0$；由

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{dv_x}{dt}=0$$

直接能够得到$mv_x=$恒量．

如果使用动量p的话，根据$\frac{d}{dt}p_x=0$,就能够得到p_x=恒量.

在力为有心力的情况，势能仅为原点（取力心为原点）与质点的距离

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.3}$$

的函数$U(r)$与表示连接原点与质点的线段（称为矢径）的方向的角度θ无关．这时的力为

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{dU}{dr}\frac{x}{r}=-\frac{dU}{dr}\cos\theta$$

$$F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}=-\frac{dU}{dr}\sin\theta$$

一般情况下，F_x也好，F_y也好，都存在（图1-1）．但是，将力F分解为矢径方向和与矢径垂直方向上的分量时，

$$F_r=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta=-\frac{dU}{dr} \tag{1.4}$$

$$F_\theta=-F_x\sin\theta+F_y\cos\theta=0$$

得到$F_\theta=0$．那么，如同由$F_x=0$立刻可导出p_x=恒量一样，由$F_\theta=0$能够导出什么结果来呢？在后面的§1-2将讲到，加速度a的分量为

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$$

所以根据$F_\theta=ma_\theta=0$有

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}=r(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0$$

即能导出（图1-2）：

$$r^2\dot{\theta}=rv_\theta=\text{恒量} \tag{1.5}$$

这表示**面积速度**（$rv_\theta/2$）**恒定**原理，已如第一卷《力学》的4－3节所述．这样一来，关于θ分量运动方程的积分一次就能完成，使用这个(1.5)的关系，可由矢径分量的运动方程$ma_r=F_r$中消去$\dot{\theta}$，得到仅含r和t的微分方程．

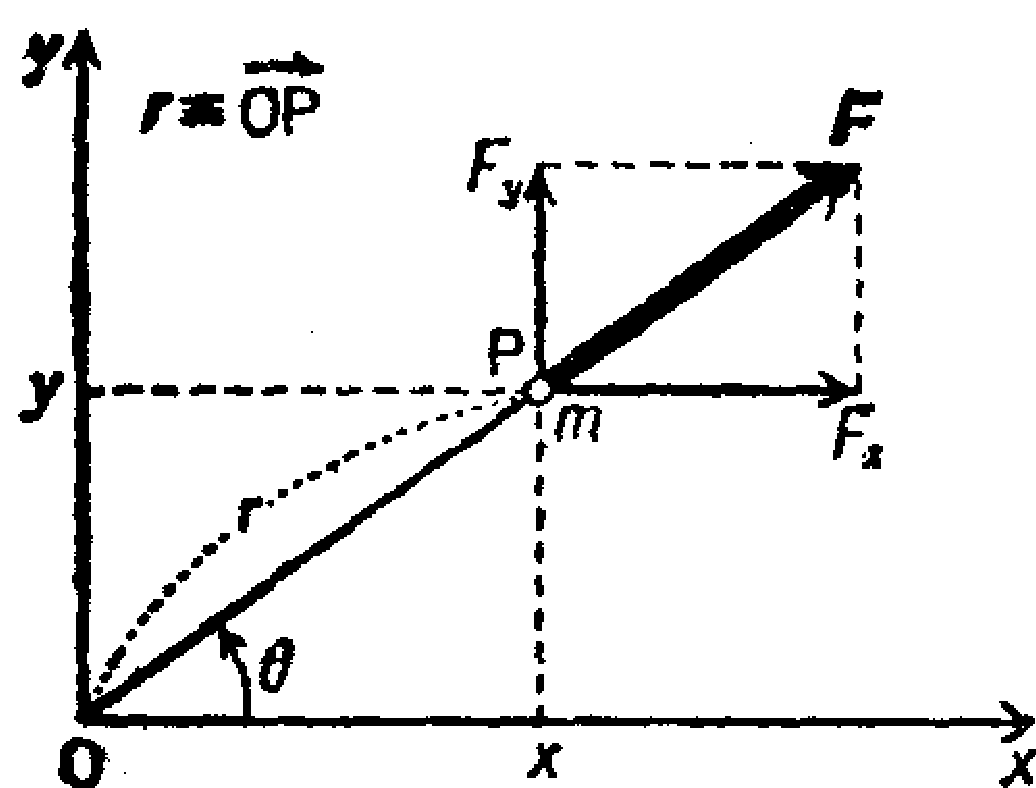


图1-1　力为斥力的场合

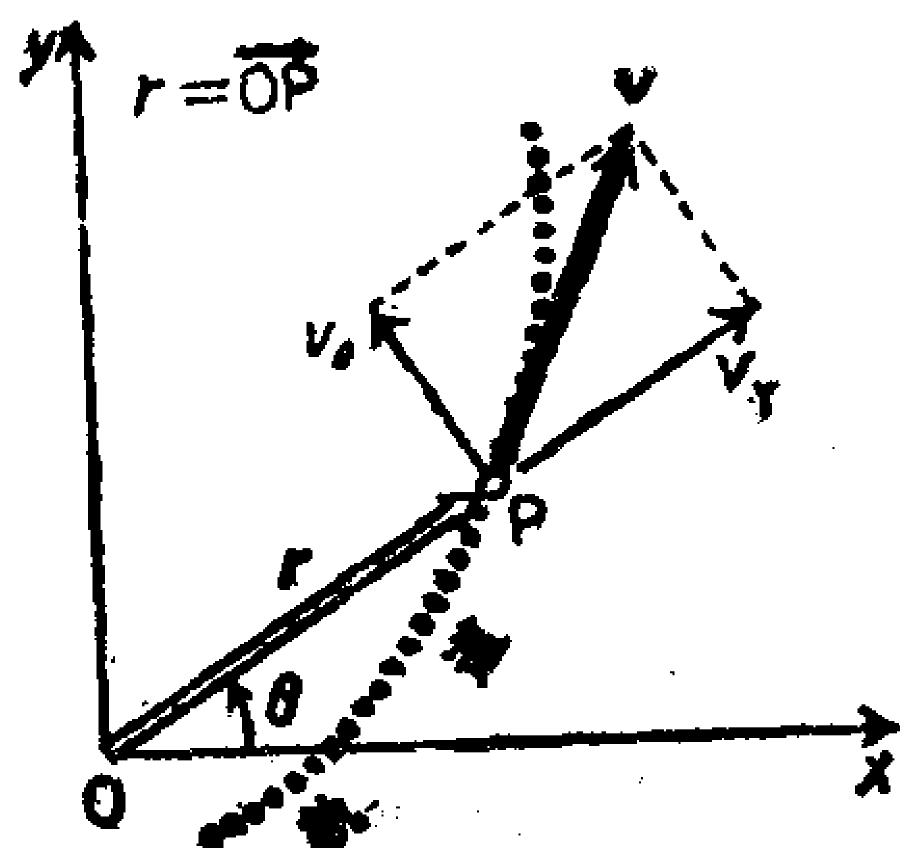


图1-2

为了由运动方程来决定运动，需要进行积分，一般说来，这不是件容易的事情．其原因在于，多个变数（x和y或者r与θ等）相互依存的情况很多．如果能够尽可能地将它们分离开，而且能将方程中尽可能多的部分表示为$d(\cdots)/dt=0$的形式，那么就可以直接积分．为此，即使在笛卡儿坐标下，也有必要注意坐标轴的选取；如果是有心力的话，采用极坐标更为合适．

进而言之，在运动当中，多数是诸如沿着某个平面，或者在球面上那样地附加有约束条件．关于这一点将在第二章中详细论及．基于上述理由，作为今后使用笛卡儿坐标以外的坐标的准备，在此首先稍微仔细地对平面极坐标做些考察．

在二维的情况下，笛卡儿坐标与普通的方格坐标纸相对应．“y＝常数”表示与x轴平行的直线；每次少许改变这个常数（例如说每次1mm），一次次地引直线的话，就能得到间隔为1mm的平行直线族．同样，“x＝常数”构成与y轴平行的直线族．这样形式的方格坐标纸，为了指定位置，如果精度到mm为止，则只要说出在哪条横线和哪条纵线的交点就可以了．京都和札幌的城市规划就是建立在这样的考虑方法之上，通过东西和南北的街道名称，就能够指定位置．京都市的四条河原町就是四条大街与河原町大街的交叉点，是京都第一的繁华区．

与此相对应，东京的城市规划则是极不完善，呈现出平面极

坐标的状况．主要的街道是以皇居为中心，由内侧的名为环状1号、2号……的同心圆形式的道路群与名为辐射1号、2号…的由中心向郊外呈辐射状的道路所构成．与此相对应的“坐标纸”就成为图1-3那样．使“r＝常数”的常数每次稍稍改变，即可画出同心圆，而辐射状的半直线则与各种值的“θ＝常数”相对应．

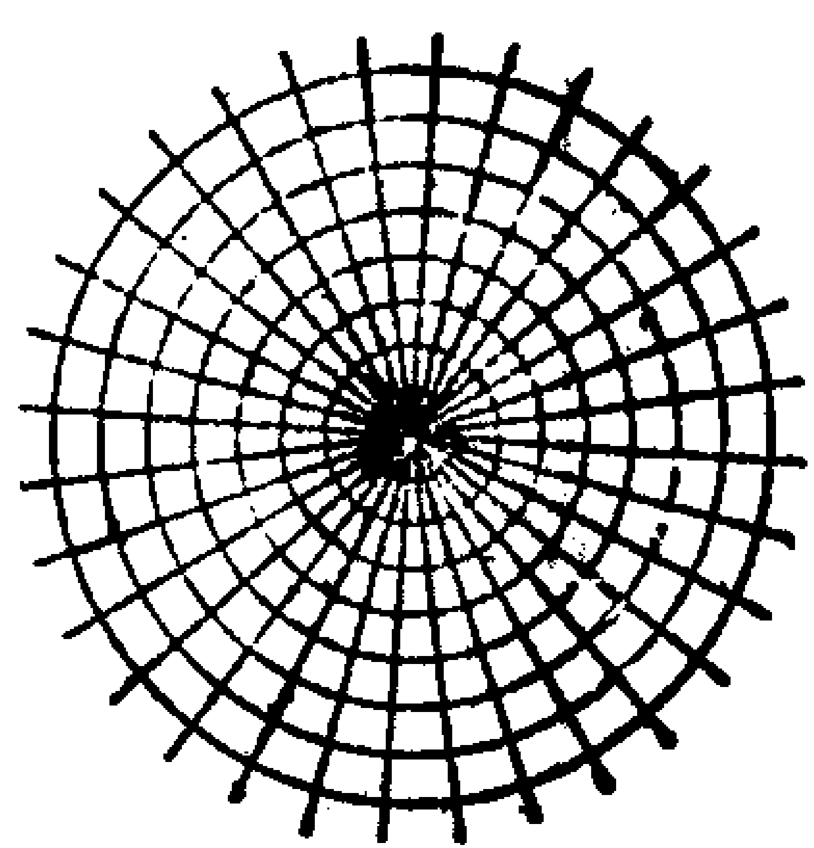
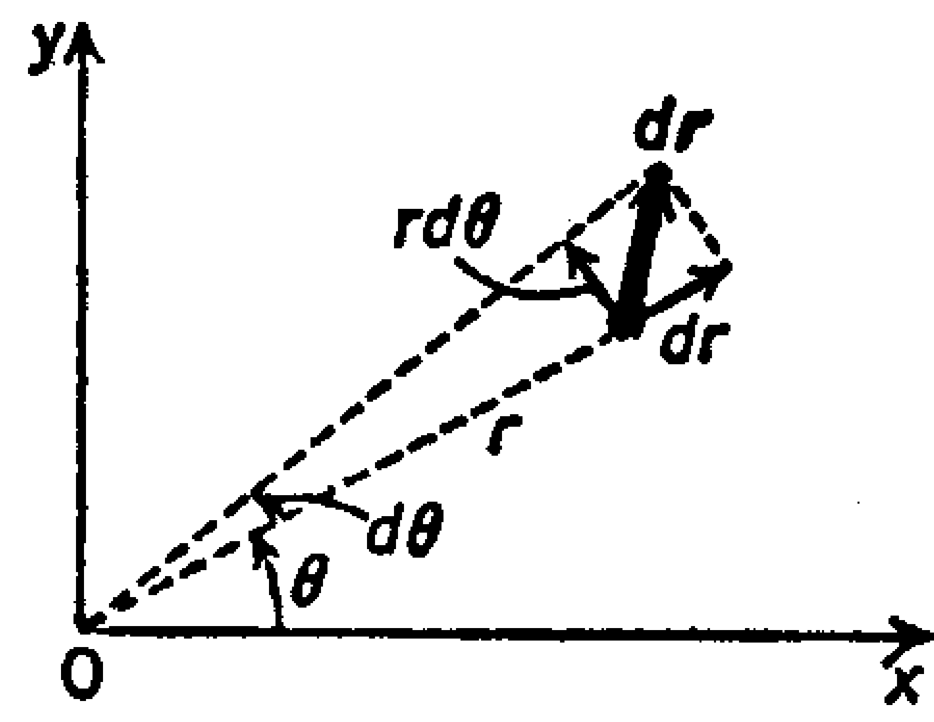


图 1-3

这种场合，“θ＝常数”为（半）直线，“r＝常数”是圆，是弯曲的．然而，这些直线族与曲线族相互完全正交．因此，平面极坐标是**正交曲线坐标**中的一种．

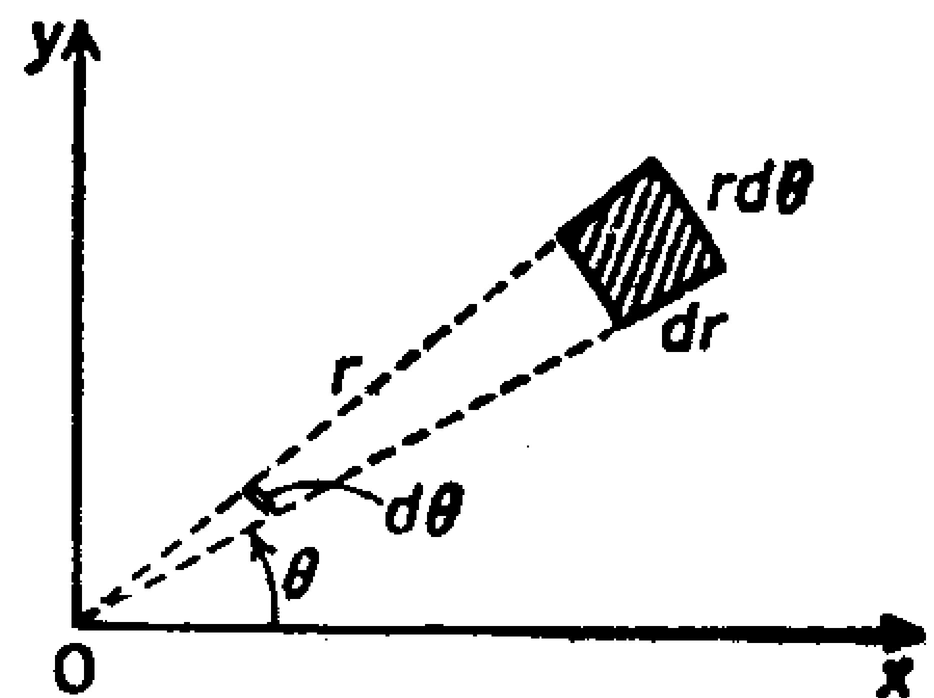
在使用平面极坐标r、θ时，将矢量分解在辐射线方向（r方向）与同心圆方向（θ方向）上是很方便的．将位移元$d\boldsymbol{r}$，也如此分解时，就有：

$$(d\boldsymbol{r})_r = dr,\quad (d\boldsymbol{r})_\theta = rd\theta \quad (1.6)$$



与r具有长度的量纲相对，θ是角度（弧度），为无名数，故dr与$d\theta$不同格，一方仅为dr而另一方则为$rd\theta$，二者有区别．

微分面积（面积元）也取图1-3的“坐标纸”那样的小块．设沿辐射线取dr，沿同心圆取$rd\theta$时，由于它们很小，故可将其视为矩形的两边而有：



$$\text{微分面积} = rdrd\theta \quad (1.7)$$

图1-4 微分位移$d\boldsymbol{r}$与微分面积

切记，在平面极坐标当中，与笛卡儿坐标时的$dxdy$相对应的不是$drd\theta$，而是$rdrd\theta$．（对于数学熟练的读者，也可以使用

由（x，y）变换为（r，θ）的$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$时的雅可比行列式为$\partial(x, y)/\partial(r, \theta)=r$这一结果）.

在将任意的矢量V分解到r方向与θ方向上时，由图1-5马上可看出，它与V_x、V_y的关系为

$$V_r=V_x\cos\theta+V_y\sin\theta$$
$$V_\theta=-V_x\sin\theta+V_y\cos\theta \tag{1.8}$$

反过来，可给出：

$$V_x=V_r\cos\theta-V_\theta\sin\theta$$
$$V_y=V_r\sin\theta+V_\theta\cos\theta \tag{1.9}$$

这些是本章今后往往要用到的关系式.

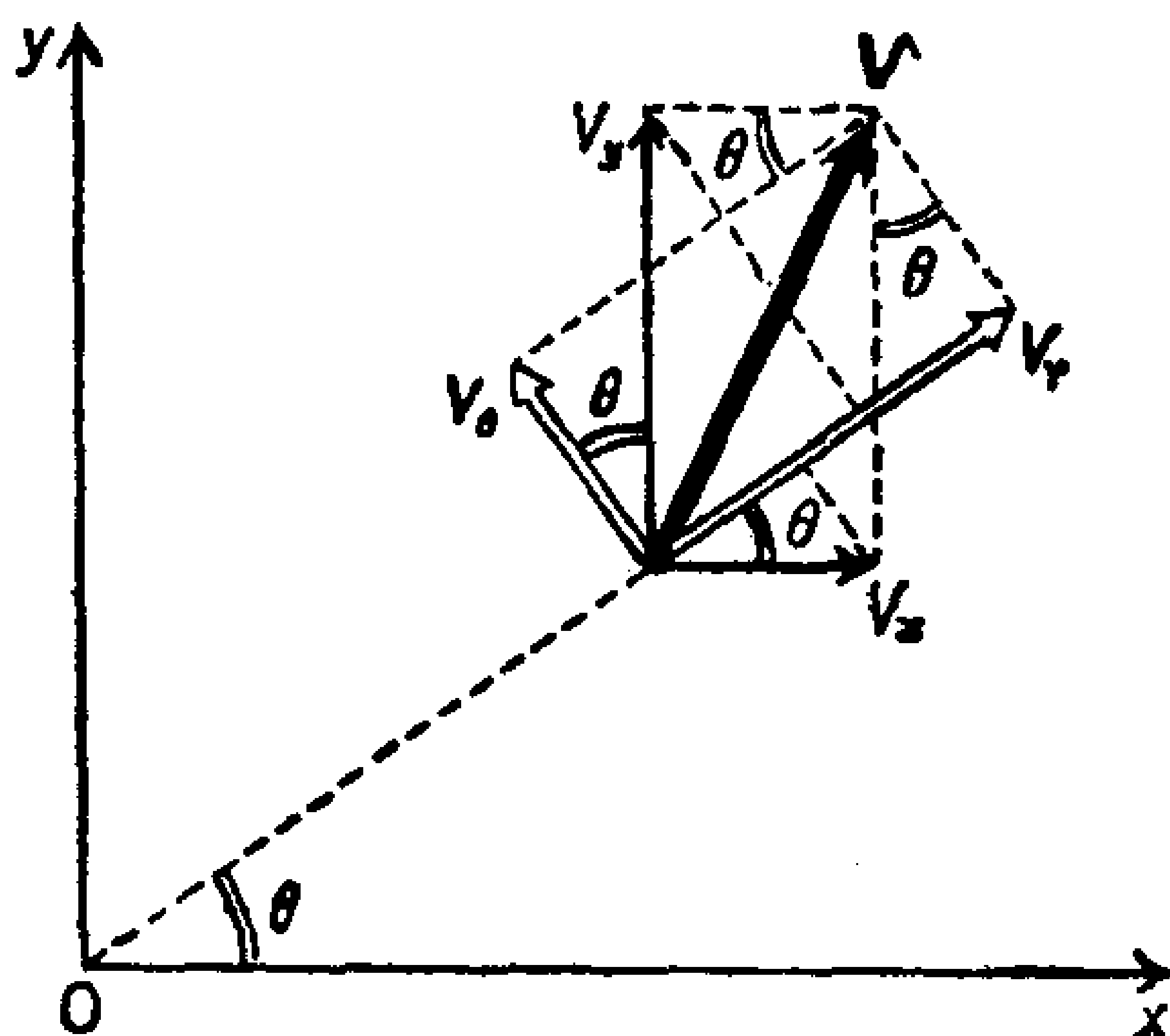


图1-5　矢量V的分解

§1-2　平面极坐标下的运动方程

以上述内容为准备知识，并从复习的角度出发，我们来回顾一下在平面极坐标下处理运动的方法. 因为基本的出发点是牛顿的运动方程$ma=F$，故有必要将加速度a用r和θ——都是时间t的函数——来表示.

首先，从速度

$$v=\frac{dr}{dt}$$

来考虑.

将位移元$d\boldsymbol{r}$如同（1.6）那样分解，因为用标量$1/dt$乘上它就是v_r和v_θ，故直接看出：

$$v_r=\frac{dr}{dt}, \qquad v_\theta=r\frac{d\theta}{dt} \tag{1.10}$$

采用牛顿流派的简略记号写出来，就变为

$$v_r=\dot{r}, \qquad v_\theta=r\dot{\theta} \tag{1.10'}$$

把它再稍微"完全如实地"做出来，则有如下的情况.

将$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$对t微分，由于r和θ均为t的函数，故：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\frac{d}{dt}\cos\theta\\&=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\cos\theta\\&=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta)\end{aligned}$$

在简略记号下有：

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta \tag{1.11a}$$

同样有：

$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta \tag{1.11b}$$

将它们与矢量的变换式（1.9）比较，由于$\dot{x}=v_x$，$\dot{y}=v_y$，故直接可看出(1.10′).

对于加速度，除了老老实实地计算，别无他法．将(1.11a，b)再一次对t微分得(计算请读者自己进行)：

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\cos\theta-(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\sin\theta\\\ddot{y}&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin\theta+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\cos\theta\end{aligned} \tag{1.12}$$

因为$\ddot{x}=a_x$、$\ddot{y}=a_y$，通过与(1.9)式比较得：

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta} \tag{1.13}$$

这里必须注意之点是，将(1.10)或者(1.10′)对t微分之后并

非就是a_r，a_θ.

$$a_r \neq \frac{dv_r}{dt}, \quad a_\theta \neq \frac{dv_\theta}{dt}$$

其理由在于：由于θ为t的函数，所谓r方向或者θ方向并非空间固定的方向，而是随着运动而变化的．这就是随着采用曲线坐标而带来的困难之一．能够巧妙地避开这个麻烦的是拉格朗日方法．为此，我们要求读者目前暂时先忍耐一下．

那么，将牛顿运动方程$ma=F$分解为r分量和θ分量写出来的话，就有：

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r, \quad m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=F_\theta \qquad (1.14)$$

下面的问题就是针对F_r，F_θ的形式，在解方程的方法上下功夫了．在有心力的场合，由于$F_r=F(r)$，$F_\theta=0$，故(1.14)的第二式变为

$$m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0$$

将左边变形，改写为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0 \qquad (1.15a)$$

由此

$$mr^2\dot{\theta}=\text{恒量} \qquad (1.15b)$$

也就是得出(1.5)式的$mrv_\theta=$恒量.

关于引入$F(r)$的具体形式——例如万有引力——时的求解方法，已经在《力学》中叙述过，此处不再重复.

§1-3 平面极坐标下的广义力

用笛卡儿坐标来处理质点的平面运动，这将意味着什么呢？

若将动量p定义为$p_x=m\dot{x}$，$p_y=m\dot{y}$的话，运动方程就能写为

$$\frac{d}{dt}p_x=F_x,\quad \frac{d}{dt}p_y=F_y \tag{1.16}$$

左边与ma_x，ma_y相同．牛顿力学的出发点是(1.16)的形式．正如同在碰撞时的守恒定律等所显示出来的那样，动量较之于速度而言，是一个更基本的量，(1.16)式较之于$ma=F$具有更一般的、广泛的表现性．

可是，这个p_x和p_y是可由动能$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$导出的量：

$$p_x=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}},\quad p_y=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \tag{1.17a}$$

因此可知，(1.16)式也可写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=F_x,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=F_y \tag{1.17b}$$

在用$(r,\ \theta)$来代替$(x,\ y)$时，让我们来看看与此相对，和(1.17b)相同的式子是否成立？

由于用(1.10′)，动能可写为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \tag{1.18}$$

故与(1.17*a*)相对应的量有两个：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \tag{1.19}$$

因此，根据(1.14)有：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)=F_r+mr\dot{\theta}^2 \tag{1.20a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=rF_\theta \tag{1.20b}$$

在(1.20a)中，除了F_r之外，尚出现$mr\dot{\theta}^2$的表观力（离心力），(1.20b)的右边不是F_θ而变成了rF_θ．由于角度θ不具有长度的量纲，故$\dot{\theta}$亦不具有速度的量纲，从而(1.20b)的左边不具有力的量纲．因此，右边如果是F_θ的话，那就不合适了．在产生

位移元$d\boldsymbol{r}$时，将力$\boldsymbol{F}$所做的功

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=F_x dx+F_y dy$$

进行改写时，也会发生同样的情况.

根据标量积的定义：

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=F_r(d\boldsymbol{r})_r+F_\theta(d\boldsymbol{r})_\theta$$

由(1.6)，它可表为

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=F_r dr+F_\theta r d\theta$$

写出微分的功

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=Q_r dr+Q_\theta d\theta \tag{1.21}$$

Q_r，Q_θ分别称为对应于坐标r，θ的**广义力**. 根据上式有：

$$Q_r=F_r,\quad Q_\theta=rF_\theta \tag{1.22}$$

由此可知，(1.20b)右边出现的当然是这个Q_θ. 这样，(1.20b)变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right)=Q_\theta$$

(1.20a)当中还保留有多余的$mr\dot\theta^2$项，并不只是单纯的Q_r. 从下节的一般形式下的讨论中可知，这一项是由于T当中除了$\dot r$，$\dot\theta$之外，尚含有r，由$\dfrac{\partial T}{\partial r}=mr\dot\theta^2$而得出来的. 由于$T$当中不包含$\theta$，故$\partial T/\partial\theta=0$，在$Q_\theta$当中不带有多余的项. 由上述情况可知，对$r$和$\theta$的运动方程可表示为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r \tag{1.23a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta \tag{1.23b}$$

为了形式上的整齐，在(1.23b)的左边加上第二项，在现在的场合，该项为零.

上面将平面极坐标下的运动方程变形而得到(1.23a、b)，下一节将考虑一般化的情形.

§1-4 广义坐标和广义力

在笛卡儿坐标下，描述由N个质点构成的质点组时，采用了

$$\begin{cases} \text{坐标(位置)：} & x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots x_N, y_N, z_N \\ \text{速度分量：} & \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \cdots \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N \\ \text{动量分量：} & p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, p_{2x}, p_{2y}, p_{2z}, \cdots p_{Nx}, \\ & p_{Ny}, p_{Nz} \end{cases}$$

动能可表为

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}(p_{ix}^2+p_{iy}^2+p_{iz}^2)$$

x，y，z分量相互具有同等的资格，以三个为一组构成矢量，量纲相同.

然而，下面在处理它们时，没有必要将每三个为一组地区别开而凑在一起，故将这3N个坐标、速度分量、动量分量分别加上通用编号.

$$\begin{cases} \text{坐标：} & x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N} \\ \text{速度分量：} & \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \cdots \dot{x}_{3N-2}, \dot{x}_{3N-1}, \dot{x}_{3N} \\ \text{动量分量：} & p_1, p_2, p_3, \cdots p_{3N-2}, p_{3N-1}, p_{3N} \end{cases}$$

也就是说，新的x_3为原来的z_1，新的$\dot{x}_{3N-1}$为原来的$\dot{y}_N$.

质量亦可写成m_1，m_2，m_3，$\cdots m_{3N}$. 新的m_1，m_2，m_3都等于原来的m_1，新的m_4，m_5，m_6等于原来的m_2.

这样一来，设$n=3N$，动能就可以简单地表示成为

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m_i}p_i^2 \qquad (1.24)$$

上节中讨论的平面运动可以认为是这里$n=2$的情形.

为了描述有心力场内的质点，如同利用r和θ较之笛卡儿坐标（x，y）更为方便一样，在一般质点系的情况下也往往如此

办理．将原子作为质点看待时，以由两个原子组成的双原子分子为例，使用重心的笛卡儿坐标X，Y，Z，两个原子间的距离R．表示连接两个原子的直线（称为分子轴线）的方向的角度θ和ϕ(参看 图1-6)较为方便．

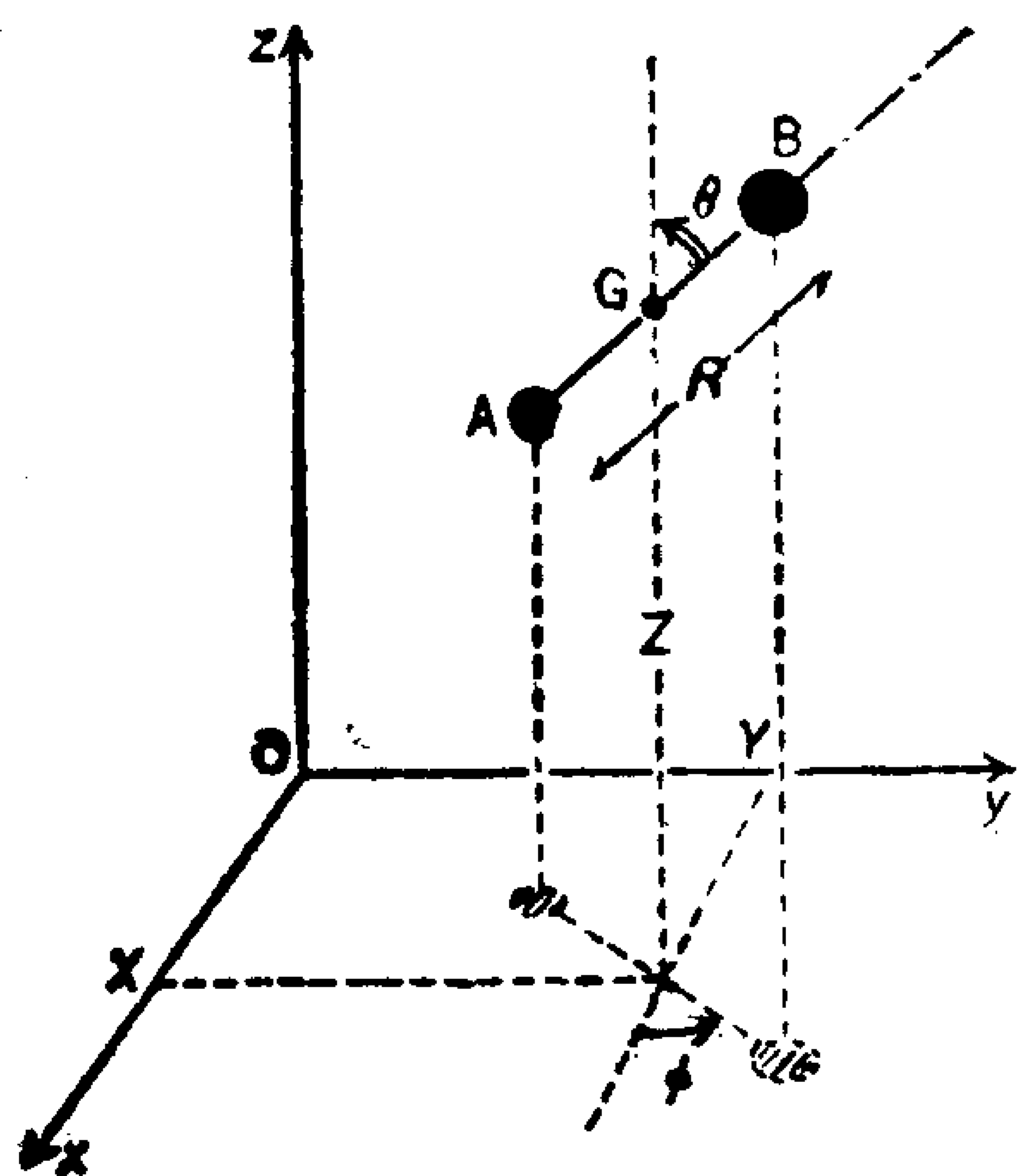


图1-6

例题1 用x_A，y_A，z_A，x_B，y_B，z_B来表示X，Y，Z，R，θ，ϕ时，呈现什么形式？

［解］

$$X=\frac{m_A x_A+m_B x_B}{m_A+m_B}, \qquad Y=\frac{m_A y_A+m_B y_B}{m_A+m_B}$$

$$Z=\frac{m_A z_A+m_B z_B}{m_A+m_B}$$

$$R=\sqrt{(x_B-x_A)^3+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{z_B-z_A}{R} \qquad (R\text{可将上式代入})$$

$$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

问题1 证明：与例题相反，用X，Y，Z，R，θ，ϕ来表示x_A，y_A，…，z_B时，动能为

$$T=\frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{\mu}{2}\{\dot{R}^2+(R\dot{\theta})^2+(R\dot{\phi})^2\sin^2\theta \qquad (1.25)$$

其中：$M=m_A+m_B$为分子的总质量，

$$\mu=\frac{m_A m_B}{m_A+m_B}$$

为折合质量，

如该例所示，将代替笛卡儿坐标，而用来确定质点系所有质点位置的变数称之为**广义坐标**．今后，用记号q_1，q_2，$q_3\cdots,q_n$来表示．这样，这两组坐标就可以用上面的例题和问题中得到的函数关系联系起来．

现在，若可将原来的笛卡儿坐标x_1，x_2，$\cdots x_n$以广义坐标q_1，q_2，$\cdots$，q_n的函数表示出来：

$$
\begin{aligned}
&x_1=x_1(q_1,\ q_2\cdots q_n)\\
&x_2=x_2(q_1,\ q_2,\ \cdots q_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&x_n=x_n(q_1,\ q_2,\ \cdots q_n)
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

本来，右边的x_1，$x_2\cdots$应当写成f_1，f_2，$\cdots$等等，但那样一来反而变得麻烦，故采用了这样的记法．x_1，x_2，$\cdots x_n$为t的函数，在上式当中，因q_1，q_2，$\cdots q_n$为t的函数，可以看成是通过它们与t发生依存关系．这样，将它们对t微分得：

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_n}\dot{q}_n\ (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

或者

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.27}$$

如果是平面极坐标，其具体形式就是(1.11a)、(1.11b)．$\dot{x}_i$为$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，$\cdots\dot{q}_n$的线性函数，由平面极坐标的例子也可看出，其系数$\partial x_i/\partial q_j$一般是$q_1$，$q_2$，$\cdots q_n$的函数．当$q_1$，$q_2$，$\cdots q_n$为正交直线坐标时，系数变成常数．

这样，由于$\dot{x}_i$与q_1，$q_2\cdots$和$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，$\cdots$二者均有依存关系，故可以写成

$$\dot{x}_i=\dot{x}_i(q_1,\ q_2,\ \cdots q_n,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots,\ \dot{q}_n)$$

的样子．

由（1.27）看出，它相对于$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…是**线性的**，故由（1.27）可知：

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{1.28}$$

左边的偏微分系数的意义是，将$\dot{x}_i$看作$2n$个变数q_1，q_2，…q_n，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…$\dot{q}_n$的函数时，除了$\dot{q}_j$以外，所有都当作为常数看待而对$\dot{q}_j$进行微分所得到的导函数．下面常常用到（1.28）式．

问题2 试确定在平面极坐标情况下的(1.28)式．

现在，设质点组的各质点有微小的位移，q_1，q_2，…q_n分别变化了dq_1，dq_2，…dq_n．由此引起$x_i=x_i(q_1, q_2, \cdots q_n)$的变化由

$$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_n}dq_n$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}dq_j \tag{1.29}$$

给出（认为该位移是在微小时间dt之内完成的，将该式两端除以dt，即为（1.27）式）．我们设在原来的正交直线坐标下所表示出的作用于各质点上的力的分量为F_1，F_2，…F_n．这样一来，产生上述位移时，这些力所做的功由

$$\delta' W=F_1dx_1+F_2dx_2+\cdots+F_ndx_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}F_i dx_i \tag{1.30}$$

把（1.29）代入得：

$$\delta' W=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}dq_j$$

先对i求和，记作

$$\boxed{Q_j=\sum_{i=1}^{n}F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}} \tag{1.31}$$

时，有：

$$\delta' W = \sum_{j=1}^{n} Q_j dq_j \tag{1.32}$$

具体的一个例子已如（1.21）所示．与广义坐标q_j相对应，将这个Q_j称之为**广义力**．

由于$\delta' W$具有功的量纲（等于能量的量纲），所以Q_j具有［功］÷［q_j］的量纲．当q_j具有长度的量纲时，Q_j成为具有力的量纲的量．但一般而言，Q_j未必具有力的量纲．平面极坐标情况下的Q_θ即为其一例．

例题2　试求出相对于三维极坐标r，θ，ϕ的广义力．特别是当力为有心力的场合又将如何？

［解］　因为：

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\quad y = r\sin\theta\sin\phi,\quad z = r\cos\theta,$$

$$\begin{cases} dx = \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi \\ dy = \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi \\ dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{cases}$$

所以可知

$$\begin{aligned} Q_r &= F_x\sin\theta\cos\phi + F_y\sin\theta\sin\phi + F_z\cos\theta \\ Q_\theta &= F_x r\cos\theta\cos\phi + F_y r\cos\theta\sin\phi - F_z r\sin\theta \\ Q_\phi &= -F_x r\sin\theta\sin\phi + F_y r\sin\theta\cos\phi (= xF_y - yF_x) \end{aligned}$$

Q_ϕ为力矩的z分量．特别是假如力为有心力，在矢径方向变成$F(r)$时，于是能写成：

$$\begin{cases} F_x = F(r)\sin\theta\cos\phi \\ F_y = F(r)\sin\theta\sin\phi \\ F_z = F(r)\cos\theta \end{cases}$$

将此代入上面的式子，则化简为

$$Q_r = F(r),\qquad Q_\theta = Q_\phi = 0$$

当力具有势能U的保守力的场合，根据定义，在笛卡儿坐标下，可表示为

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{1.33}$$

将其代入（1.31）的右端得：

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

这无非是将$U(x_1, x_2, \cdots x_n)$的x_1，x_2，$\cdots x_n$用(1.26)代入时，U被改写成q_1，q_2，$\cdots$，q_n的函数，然后将得到的U对q_j进行微分时的式子（复合函数的微分）：

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

冠以负号而得的结果．也就是

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}} \tag{1.34}$$

从形式上看，这与（1.33）是完全相同的式子．无论q_j是否具有长度的量纲都可以放心的使用．

由于有心力的势能仅为r的函数，故在三维极坐标下有$Q_\theta = Q_\varphi = 0$，$Q_r = -\partial U/\partial r$．此外，在前述的双原子分子情况下，只需考虑由$R$的函数给出势能$U(R)$就可得到原子间力的时候有：

$$Q_R = -\frac{\partial U}{\partial R}, \quad Q_X = Q_Y = Q_Z = Q_\theta = Q_\phi = 0$$

§1-5 拉格朗日运动方程

在二维正交直线坐标的场合，由动能T导出动量分量的式子

是（1.17a）.将其进行扩展，用广义坐标q_1，q_2，…，q_n来描述时，它们的共轭广义动量p_1，p_2，…，p_n分别由

$$\boxed{p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}} \tag{1.35}$$

来定义.

例如，我们来考虑三维的极坐标r，θ，ϕ. 这时，与图1-3对应的是由以原点为中心的许多同心球（r为常数）；以原点为顶点、以z轴为轴线的许多圆锥面（θ为常数）；以z轴为边缘的许多半平面（ϕ为常数）所分割的三维空间. 由于这些曲面族相互正交，故（r，θ，ϕ）是一种正交曲线坐标. 取出被切割的空间中的一个细部，就得到图1-8那样的长方体，其三个边的长度，在r增加的方向为dr，在θ增加的方向上为$rd\theta$；在ϕ增加的方向为$r\sin\theta d\phi$. 因此，体积元（微小体积）为

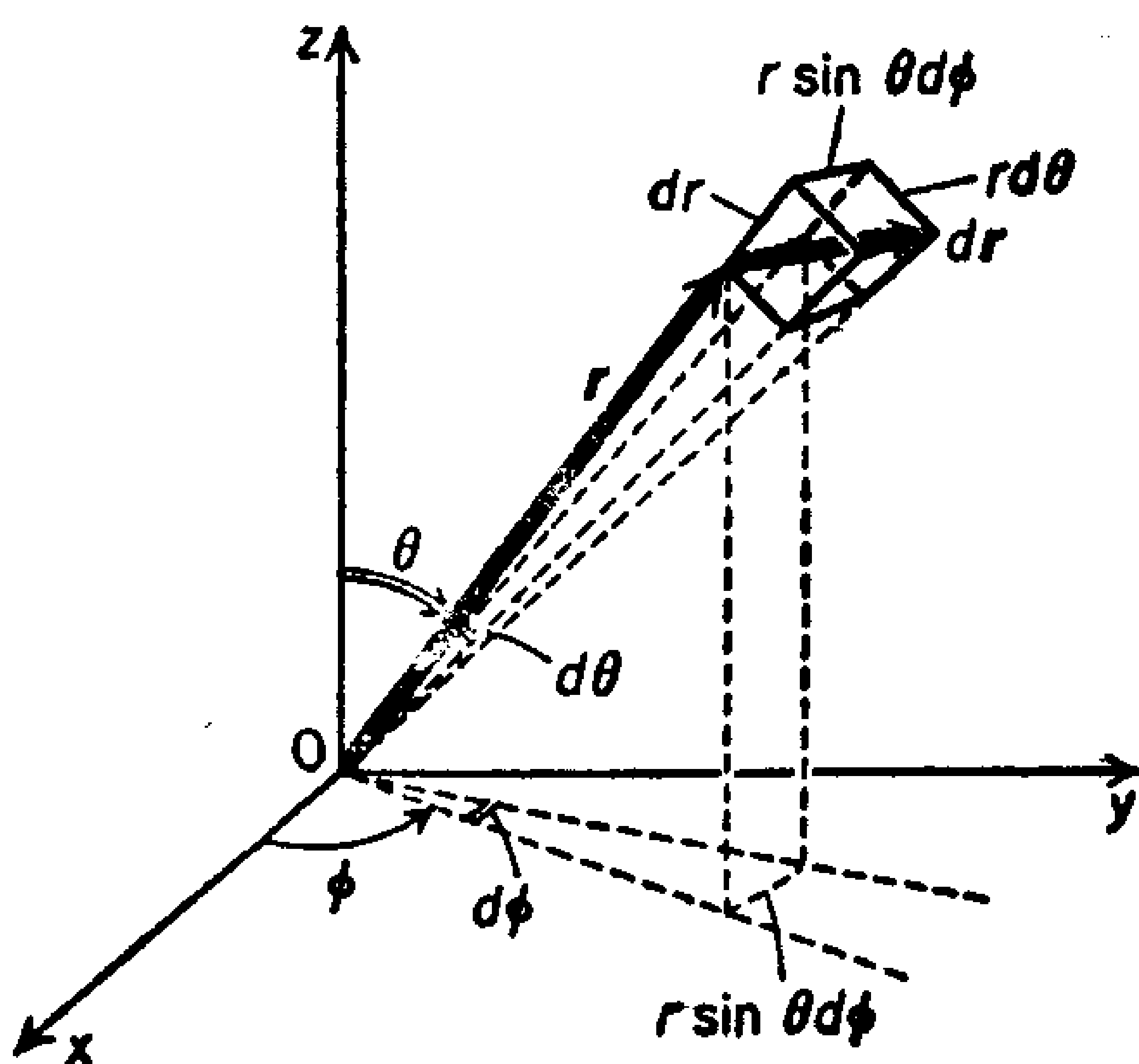


图 1-8

$$r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{1.36}$$

也就是说，与笛卡儿坐标的$dxdydz$相对应的不是$drd\theta d\phi$，而是$r^2\sin\theta drd\theta d\phi$（用雅可比行列式$\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, \phi)=r^2\sin\theta$表示，也是同样的）.

由于微小位移$d\boldsymbol{r}$的三个分量为

$$(d\boldsymbol{r})_r=dr,(d\boldsymbol{r})_\theta=rd\theta,\ (d\boldsymbol{r})_\phi=r\sin\theta d\phi \tag{1.37}$$

将其除以dt，马上得到:

$$v_r=\dot{r},\ v_\theta=r\dot{\theta},\ v_\phi=(r\sin\theta)\dot{\phi} \tag{1.38}$$

利用该式，动能成为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) \tag{1.39}$$

因此，与r、θ、ϕ共轭的动量为：

$$p_r=m\dot{r},\ p_\theta=mr^2\dot{\theta},\ p_\phi=mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta \tag{1.40}$$

我们并不象上面那样原封不动地使用p_i的定义式（1.35），而是首先将T象（1.24）那样表示成为$\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$，…，$\dot{x}_n$的函数，再如(1.27)那样，认为这些$\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$，…$\dot{x}_n$隐含着$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…$\dot{q}_n$，利用复合函数求微分的方法，得到：

$$\begin{aligned}
p_i&=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\\
&=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{q}_i}+\cdots+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_i}\\
&=\sum_j\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}
\end{aligned}$$

其中，以后将$\sum_{j=1}^{n}$单记为$\sum_j$. 此处，利用（1.28）式和$\partial T/\partial\dot{x}_j=m_j\dot{x}_j$时，可以变为

$$p_i=\sum_j m_j\dot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

将该式对t微分：

$$\dot{p}_i=\sum_j m_j\ddot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i}+\sum_j m_j\dot{x}_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \tag{1.41}$$

这里，因为$m_j\ddot{x}_j=F_j$，所以右边的第一项就成为（1.31）所定义的广义力Q_i（注意：i和j反过来了!）. 右边的第二项是在平面极坐标下给出的离心力$mr\dot{\theta}^2$，这是由于T不仅包含$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$，而且各包括q_1，q_2，…，q_n（一部分）所引起的，象下面这样做就会明白这一点.

如果T包含q_1，q_2，…，q_n的话，由于$\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$，…，$\dot{x}_n$也包含它们，故根据复合函数的微分法则，有：

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial q_i}+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_i}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_i}$$

此时，将$\partial T/\partial \dot{x}_j=m_j\dot{x}_j$代入，可变成：

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{n}m_j\dot{x}_j\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$$

在这里，将（1.27）式改换下标的式子

$$\dot{x}_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

对q_i进行偏微分时，得到：

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}=\sum_k\frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k\partial q_i}\quad\dot{q}_k$$

$$=\sum_k\frac{\partial x}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\frac{dq_k}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)$$

这是将量$\partial x_j/\partial q_i$——它是$q_1(t)$，$q_2(t)$，…，$q_n(t)$的函数——对$t$微分后的结果．因此，可以看出结果为

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_j m_j\dot{x}_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)$$

从这个道理上讲，（1.41）就可归纳为以下非常简洁的形式：

$$\frac{d}{dt}p_i=Q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}\tag{1.42}$$

若引进动量的定义$p_i=\partial T/\partial \dot{q}_i$，则（1.42）变为

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,2,\cdots,n)} \tag{1.43}$$

在笛卡儿坐标的场合，它归结为普通的运动方程．所以（1.43）可以看成是将运动方程扩展（或者变形）为广义坐标形式后的结果．

特别在力可以象（1.34）那样由势能$U(q_1, q_2, \cdots, q_n)$导出的保守力情况下，由于有：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0$$

故由

$$\boxed{L=T-U} \tag{1.44}$$

所定义的q_1，q_2，…，q_n，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$的函数称为**拉格朗日函数**（或**拉格朗日量**）——就显得很方便了．由于U与速度无关，不包含$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$，所以

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}=0$$

因此

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

故上面的式子成为

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0} \tag{1.45}$$

这称为**拉格朗日运动方程**，是实用性极高的方程．

当力的一部分可由势能U导出，而除此之外的部分——摩擦力等——剩下来的情况，可以设剩下来的部分为Q'_i，则

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q'_i} \tag{1.46}$$

而且，广义动量改由

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.47}$$

来定义也是一样的.

将以上结果应用于平面极坐标，来证实一下可以得到 §1-1 到 §1-3相同的式子．根据（1.19），与r和θ共轭的广义动量为

$$p_r=m\dot{r},\quad p_\theta=mr^2\dot{\theta}$$

p_r当然就是动量$p=mv$的r方向分量$p_r=p_x\cos\theta+p_y\sin\theta$．但是要注意，$p_\theta$并不是$p$的$\theta$方向分量$p_x\sin\theta+p_y\cos\theta=mr\dot{\theta}$，而是它的$r$倍．这也与我们在 §1-3中讲到的关于量纲的注意事项有关．因此，用p_θ这个记号来表示p的θ方向分量时，容易发生混淆而使人感到为难．但由于这是遵循着分析力学的习惯用法，因此希望读者予以充分地注意．（1.40）式给出的p_θ和p_ϕ也是一样．

那么，这样在量纲上不相同的量，为什么与p_r具有同样资格地使用呢？让我们来回想一下（1.15a）和（1.15b），在有心力的场合，作为$F_\theta=0$的结果，保持恒定的量并不是mv_θ，而应该是这个$p_\theta=mr\dot{\theta}^2$．有的读者可能已经意识到，$p_\theta$无非是角动量（与面垂直的分量）.

在使用平面极坐标的有心力问题当中，因为拉格朗日函数由

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-U(r)$$

给出，根据（1.45），

$$\text{由}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=\frac{\partial L}{\partial r}\quad\text{给出}m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\text{由}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \theta}\quad\text{给出}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=0$$

这与（1.14）或（1.20a）、（1.20b）相同．利用拉格朗日方程时，它们可以完全机械地得出来.

问题3　(1,40)式的p_r，p_θ，p_ϕ表示什么样的量?

例题1　重量可忽略不计强度为k的弹簧，一端固定，另一端悬挂着质量m的重物，使之仅在一个铅直面内振动时，则称为弹簧振子．设弹簧的自然长度为l，试列出重物的运动方程．

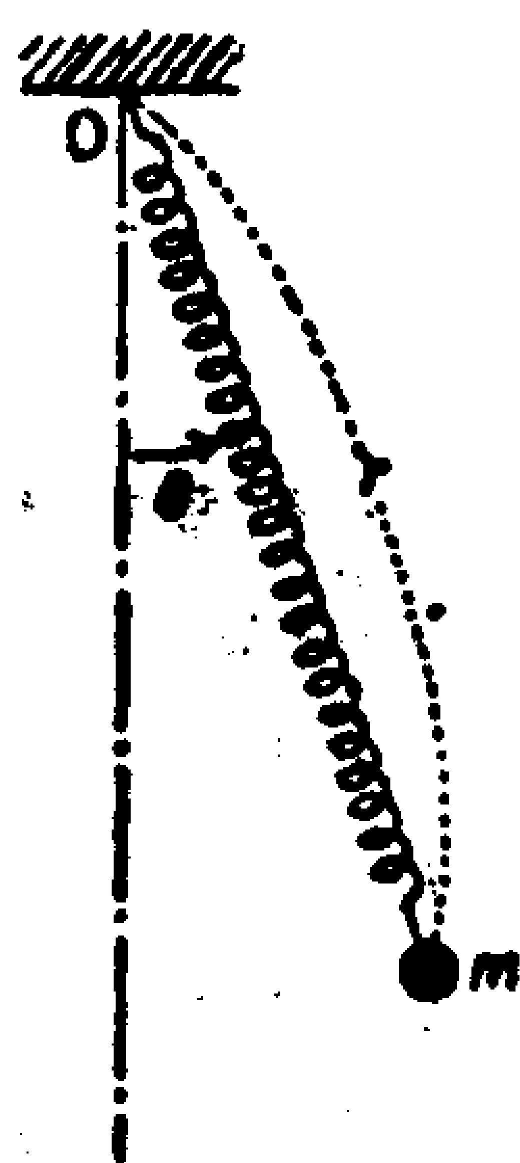


图1-9

[解]　选择由支点至重物的距离r，弹簧偏开铅直线的倾角θ为广义坐标时，

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2),$$

$$U=\frac{k}{2}(r-l)^2-mgr\cos\theta$$

因此，拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{k}{2}(r-l)^2+mgr\cos\theta$$

由此，拉格朗日运动方程可导出如下：

$$\begin{cases} m\ddot{r}=-k(r-l)+mg\cos\theta+mr\dot{\theta}^2 \\ m\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=-mgr\sin\theta \end{cases}$$

一般来说，求解这个方程是不容易的．

§1-6　能量守恒定律

考虑只有保守力的时候．拉格朗日函数L为q_1，q_2，…，q_n，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$的函数（在§2-3，出现L在此之外还直接包含t的场合．那时以下的讨论不成立）．由于q_i也好、$\dot{q}_i$也好，都是t的函数，结果就可以说L仅仅是t的函数．那么，考虑将L对t进行微分时，根据复合函数的微分法则，有：

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

课间小憩

拉格朗日的分析力学

拉格朗日的《分析力学》是离牛顿的《自然哲学的数学原理》约100年后的1788年出版的。第一部的静力学以“虚速度原理”（虚功原理．也称为虚位移原理．当时将虚位移叫做虚速度）为基本原理．这是因为杠杆或滑轮的原理、力的合成法则等均可归结为这个原理．第二部的动力学是从利用达兰贝尔原理将动力学转化为静力学问题出发的．

拉格朗日与欧拉一样，以解析方法来建立他的力学为方针，为了使虚位移与约束条件不矛盾，想出了即使不画图和应用几何学的直观方法就可以解决问题方便的待定乘数法．他进而使用适当的独立变数而大大地简化了计算，导入了广义坐标．

我们来举出几个对这样的《分析力学》的评价例子：

“这才是不高喊自然神秘力之类的最初的科学业绩．这本书不是物质系统力学行为的说明，而是有保证的记述”．（E．T．贝尔）

“终于，拉格朗日将分析力学提到了发展的最高阶段．拉格朗日将所有必要的考察一次就完成，努力企图实现用一个公式去表现尽量多的事项．……在有必要开动脑筋的事情当中，留下的仅是纯粹的力学的问题．拉格朗日力学在思维经济这一点上是有很大功绩的”．（厄恩斯特·马赫）

这里，用（1.45），将

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

代入时，得到：

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\left\{\dot{q}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right\}$$

因为{…}内正好等于$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$，故有：

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i q_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

也就是说，

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right]=0$$

因此，由于弄清了[…]内为常数，设其为E，则能得到：

$$\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=E \tag{1.48}$$

因为U不包含$\dot{q}_i$，T为$\dot{q}_i$的二次齐次式，而有：

$$\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T \tag{1.49}$$

所以(1.48)变为

$$2T-L=E$$

由于$L=T-U$，则

$$T+U=E \tag{1.50}$$

该式的左边为体系的总能量，E为常数，由此可知，(1.48)表示的是能量守恒定律.

象能量一样，根据运动方程，若某个量$F(q_1,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_f)$随时间的变化满足$\frac{dF}{dt}=0$，马上就能得到

$$F(q_1,\cdots q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_f)=\text{恒量}$$

类型的积分．有心力情况下的p_θ也为其一例．这些量即使历经时间也保持恒定而不发生变化，所以也可称之为**守恒量**．但在以上的意义下，可叫做**积分**．例如将(1.50)式叫做**能量积分**，而将(1.50)成立的体系称为“具有能量积分”．

能求积分的是对t微分为零的量．若将拉格朗日方程

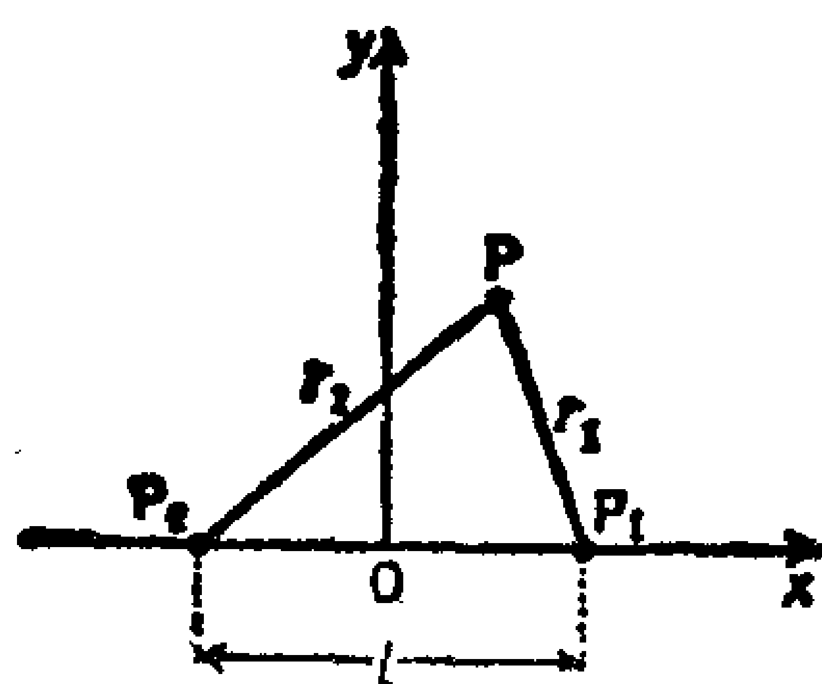
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

写出来，马上就可以看出，如果拉格朗日函数不包含q_i的话，$p_i=\partial L/\partial \dot{q}_i$就成为守恒量．在 §1-1中最初出现的抛物运动时的p_x，有心力场下的p_θ当然由于这个理由而构成守恒量（常数）.将那样的广义坐标叫做**循环坐标**，在选择广义坐标时，最好的情况是尽量使得循环坐标的数目多一些．关于这一点，在第四章中将再详细地研究．

习　　题

1．如图所示，为了表示半平面($y\geq 0$)上点的位置，可以利用离开x轴上的两个定点$P_1=(+l/2,\ 0)$，$P_2=(-l/2,\ 0)$的距离r_1和r_2，也可用

$$\xi=r_1+r_2,\quad \eta=r_1-r_2\quad (\xi\geq l,\ \rho\geq\eta\geq -l)$$



来代替．试说明使用这个ξ、η时，可以表示为

$$x=\frac{-\xi\eta}{2l},\qquad y=\frac{1}{2l}\sqrt{(\xi^2-l^2)(l^2-\eta^2)}$$

并证明ξ，η构成正交曲线坐标．说明面积元

由
$$dS=\frac{\xi^2-\eta^2}{4\sqrt{(\xi^2-l^2)(l^2-\eta^2)}}d\xi d\eta$$

给出．

2．回答以下关于在有心力场中运动粒子在矢径方向的运动问题．

(a)　试求出将矢径方向运动的方程写为$m\ddot{r}=-\dfrac{dW}{dr}$时的“有效势能”

W.

(b)利用有效势能，求出产生圆周运动的条件.

(c) 当有心力的势能为$U(r)=\frac{1}{2}kr^2$时，求出圆周运动的周期.

3. 质量为m的粒子在具有势能$U(r)=Kr^3(K>0)$的有心力场内运动.

(a)粒子轨道为半径r_0的圆时，求出其能量和角动量.

(b)这个圆周运动的周期是多少？

(c)这个运动中，粒子受到微弱的打击力(r方向)，圆周运动被干扰，试求出在$r=r_0$附近，r进行微振动的周期.

第二章　拉格朗日方程与约束

可以说，拉格朗日方程的特点，在带有约束条件的情况下得到了最充分的发挥．这是因为无需去假定面的阻力等事先无法知晓的力，而是以减少变数的数目这种方便的处理方法来达到目的．我们就一边与此目的关联，一面针对具体的情况来学习方程的使用方法．

§2-1　约束条件和广义坐标

如果事先知道力的话，通过求解满足初始条件的牛顿运动方程$ma=F$或者将其变形的拉格朗日方程，就可以确定运动．不用说，由于在求解微分方程上将出现各种各样的困难，能够简单地求解的情况似乎并不那么多．但至少在原理上这是可行的，也可以利用计算机等进行数值处理．

但与上述情况相反，有时是预先知道运动的一部分，而力则为未知．例如，"沿斜面滑动"的场合，在该斜面内取x轴和y轴，使z轴与斜面垂直时，$z(t)=0$就成为事先给定的条件．物体除受重力、人拉的力那样已知的力之外，还受到来自斜面的阻力，这不是事先给出的力．设阻力当中与斜面垂直的分量——称为**垂直阻力**——为N，这是一种认为经常保z为零，也就是使物体不致嵌入斜面内部、与需要相对应而出现的恰当的力．由于所谓$z(t)=0$，就是$\dot{z}=0$，$\ddot{z}=0$，反过来使用运动方程，作用在物体上的力的z分量（之和）必须为零．也就是说，欲使其它力的z分量与N的和恰好为零，而出现了N．

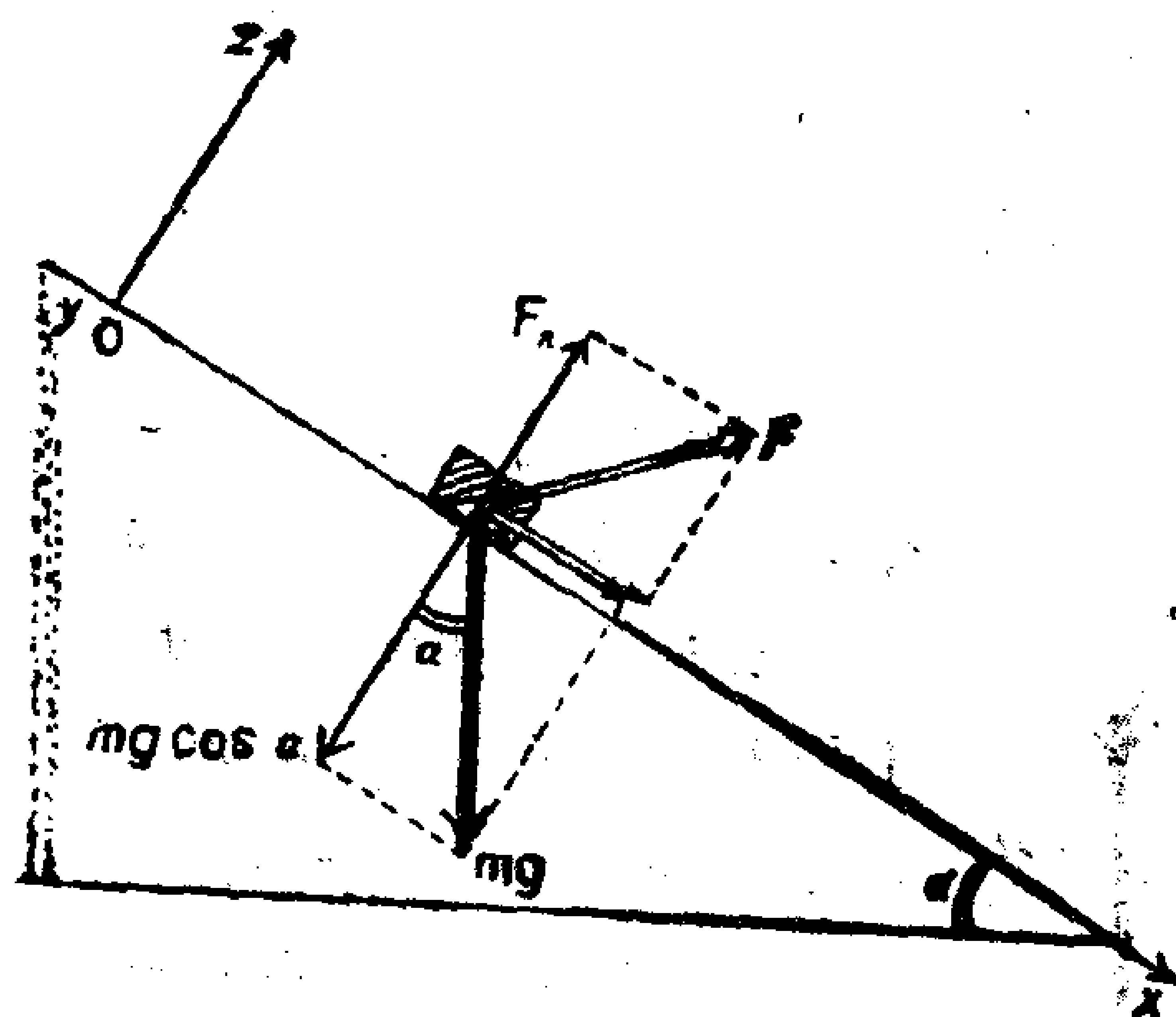


图 2-1 $mg\cos\alpha=F_n+N$，当N变为负时，物体将脱离斜面

物体放在斜面上时，由于N不可能为负，当呈现需要负的N的状况时，就不可能保持$z=0$，物体将完全脱离开斜面．

象这种例子的情况下，只要是关于z方向的运动方程就不是用于〔力〕──→〔运动〕，而变成〔运动〕──→〔力〕．因此，给定的并非阻力，而是$z=0$这个**约束条件**（也称**束缚条件**）．由此，确定物体运动的变数的个数——称为运动的**自由度**——就由x、y、z这三个减少为x、y这两个．

若斜面为平面，用上面那样的笛卡儿坐标就可以了．在一般情况下，约束条件将更是形形色色．例如来考虑在长为l的线上系有重物的单摆．线的张力起到将重物保持在半径为l的球面上的作用．更正确地说来，与斜面的阻力一样，由于线并不妨碍重物进入球面的内部（线松弛），故张力将重物约束在球内．重物来到何处，该张力也就变为多少，并非是已确定好的值，是为了让线的长度不致超过l而与需要相适应出现的力．

将重物的运动限制在一个铅直面内时，若如图2-2那样取该铅直面为xy平面，则给定的并不是张力，而是约束条件：

$$x^2+y^2\leqslant l^2 \tag{2.1}$$

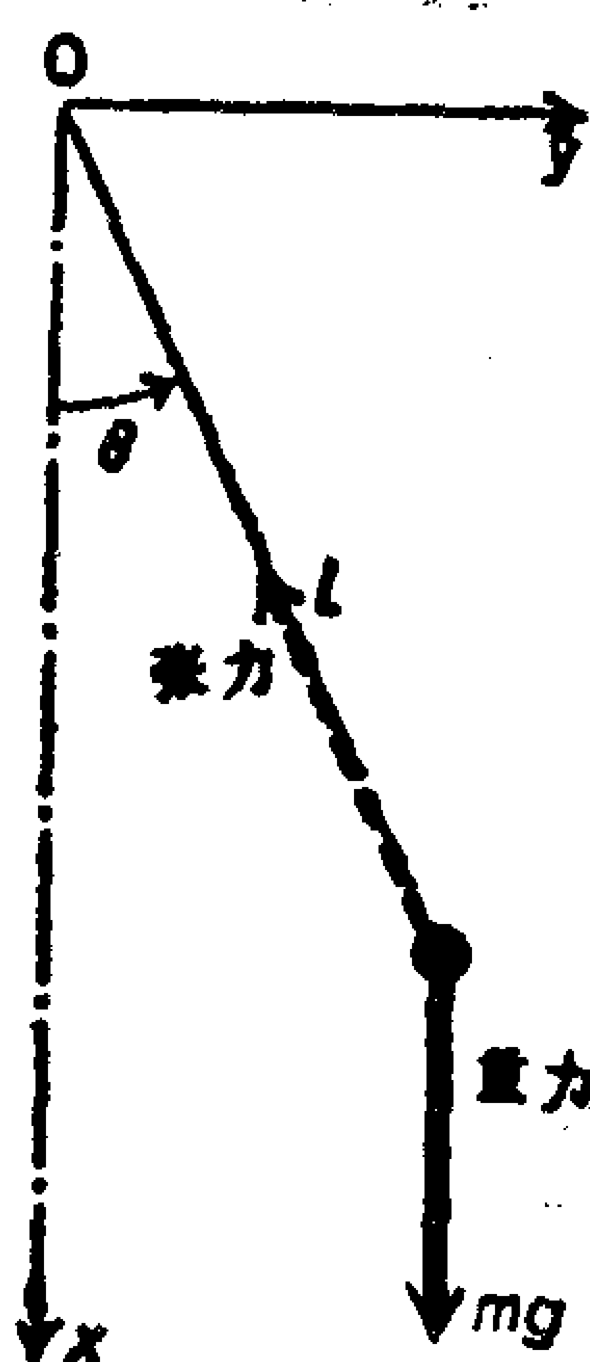


图 2-2

在使线不松弛而进行振动的单摆情况下，实际上可认为等式

$$x^2+y^2=l^2 \tag{2.2}$$

是约束条件.

这种场合，自由度从x、y这两个减少为一个，但没有道理把x丢掉而只要y. 还不如象图中那样，用线的倾角θ来表示重物位置，由于用θ的值即可单值地确定重物的位置，所以将它作为变数（作为t的函数而变化）来看待，在处理问题时较为方便.

我们来将其与§1-5例题1中用平面极坐标r、θ表示弹簧振子的情况作一个比较. 您大概会知道，所谓不伸长的线就相当于弹性系数k大到极限场合下的弹簧. 不用说，"完全不伸长"之类的说法是一种理想情况，现实情况下，总应有很微小的伸缩. 忽略了它的极限情况，可以认为应当由(2.2)式那样的条件表示出来. 在一个一个地考虑了弹簧振子那样的情况之后，为了避免取$k\to\infty$的繁杂的手续，可将重物的位置用(r, θ)来描述，因此：

$$r=l \tag{2.3}$$

经常保持恒定，在任何时候，$\dot{r}=0$，$\ddot{r}=0$均成立. 这样一来，(r,θ)当中的r已不是变数，故唯一留下来的广义坐标为θ. 这种场合，平面极坐标下的(2.3)较之于笛卡儿坐标下的(2.2)式来说，处理问题将大为简单、方便，这一点大约是不言而自明的吧.

即使在双原子分子（§1-4）情况下，由于在多数场合下可以看作"R=恒量"，所以采用广义坐标X，Y，Z，R，θ，ϕ，将$R=l$从变数当中消除的方法，较之于用笛卡儿坐标x_A，y_A，z_A，x_B，y_B，z_B，再加上约束条件

$$(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2=l^2 \tag{2.4}$$

来处理问题要容易得多.

约束条件有各种各样的形式，如(2.2)或(2.4)那样，在质点的坐标之间用一定的关系式

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0 \tag{2.5}$$

给出的约束条件，称为**完整**的约束．如 §2-3所示，即使f直接显含时间

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ t)=0 \tag{2.6}$$

也叫完整的约束.

所谓**刚体**，可认为是由许多质点构成的体系，质点系所以能维持住刚体，就是使构成质点间的距离保持恒定的许多条件：

$$(r_i-r_j)^2-l_{ij}^2=0$$

所以这也能看作是受到完整约束.

用(2.5)或(2.6)形式无法表示的**非完整**约束条件的一个例子是(2.1)式那样的不等式．当考虑到物体有脱离开斜面的可能性时，斜面也使物体受到非完整约束.

对不同的约束条件，完整约束可以用包含成为恒定值的变数的广义坐标来描述，然后，将该恒量从坐标当中消去，由N个质点构成的体系的自由度为$n=3N$，如果有k个完整约束条件，则自由度减少为$3N-k$．系统的运动由$3N-k$个广义坐标$q_1, q_2, \cdots, q_{3N-k}$就能完全决定.(在非完整约束时，没有上述那样的一般性解决方法，必须针对每个问题采取适当的处理方法)

在完整约束的场合，只要列出$3N-k$个关于广义坐标的方程进行求解就可以了，所以较之笛卡儿坐标，方程的个数减少．如果是斜面问题，可以不要关于z分量的运动方程；在单摆的情况下，就没有必要再列出对r的运动方程．在斜面的场合．由于垂直阻力仅仅包含在z方向的运动方程当中，故在x，y方向的方程中不出现．所谓弹簧摆的张力，是图2-3所示的力的极限，正如 §1 5例题 1 指出的，它仅存在于对r的运动方程当中．所以，在不考虑r运

动的处理过程中就被消去.

这样，所谓完整约束的约束力就是在相对于剩下的自由度q_1，q，…，q_{3N-k}的运动方程当中不出现的项. 也就是说，可以这样来理解完整性约束力的意义，即“只要遵守约束条件就行，对其以外的自由度运动不施加任何影响”.

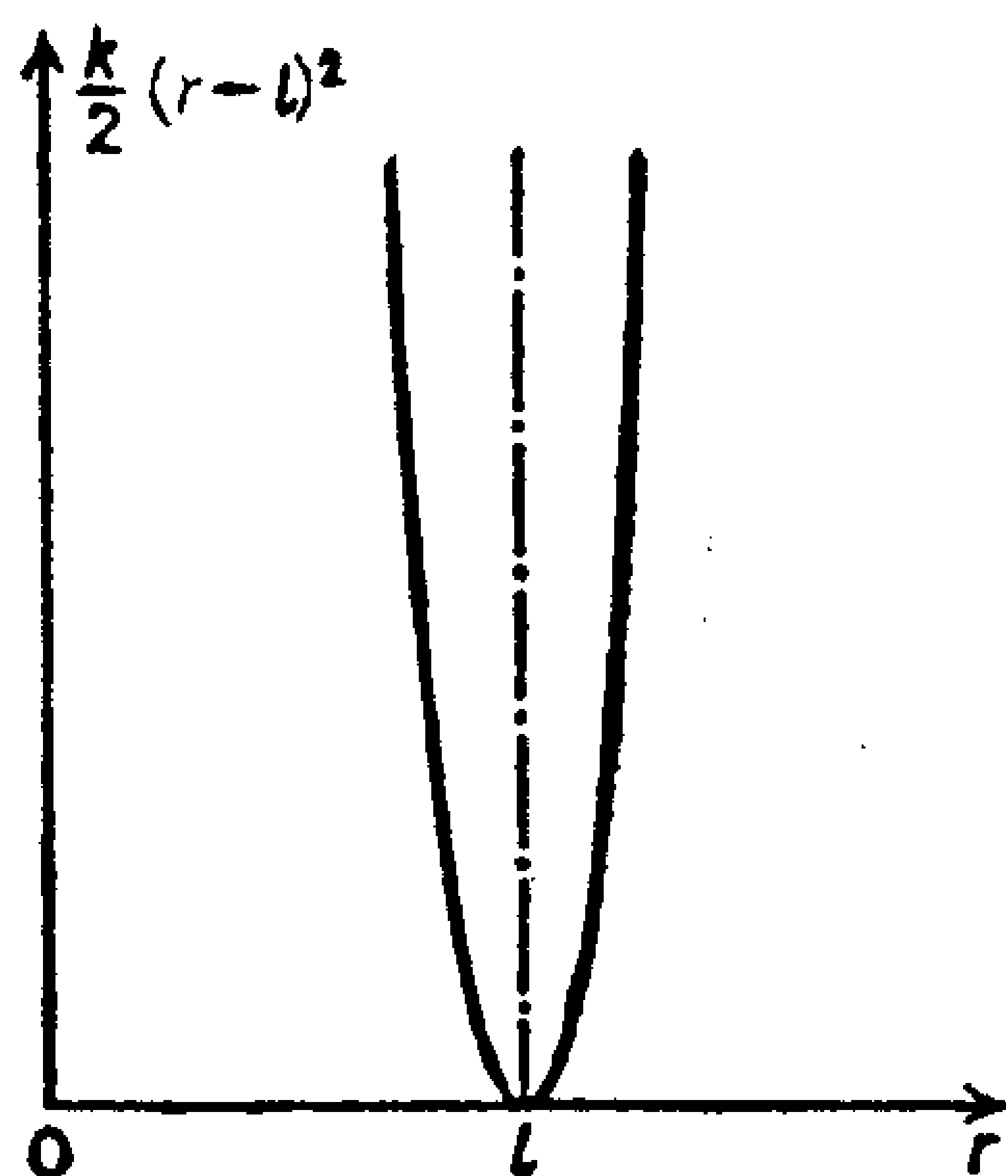


图 2-3

这样，利用拉格朗日方程，处理表示与约束不矛盾的自由度广义坐标q_1，q_2，…，q_{3N-k}的方法，其优点之一是可以完全不必去考虑那些事先不知道的约束力之类难办的事情. 在这个意义上，与物体和表面间垂直压力大小成比例的摩擦力等，将不再适用前面的处理方法而成为难于对付的力了.

迄今为止都是采取将约束力作为一种干扰物来对待，通过导入广义坐标将其排除的形式. 在有的场合下尚不尽如此. 当不知道单摆的线加了多大的张力时，强度过低的线将会被拉断. 或者说，要求负的张力，使线处于松弛状态的可能性也是存在的，不留神这一点也会遇到困难. 在那样的时候，可以假定在约束条件下舍掉的自由度又恢复了，对它列出运动方程，再来考察为了使约束条件（例如$r=l$）成立，需要什么样的力就可以了.

问题1 回过头来考察 §1-5例题1中单摆线的张力. 不限定是最低点附近的振动，试求出一般情况下张力的大小与θ的关系；并求出单摆构成圆锥摆而在铅直面内作圆运动的条件.

§2-2 拉格朗日方程的例子

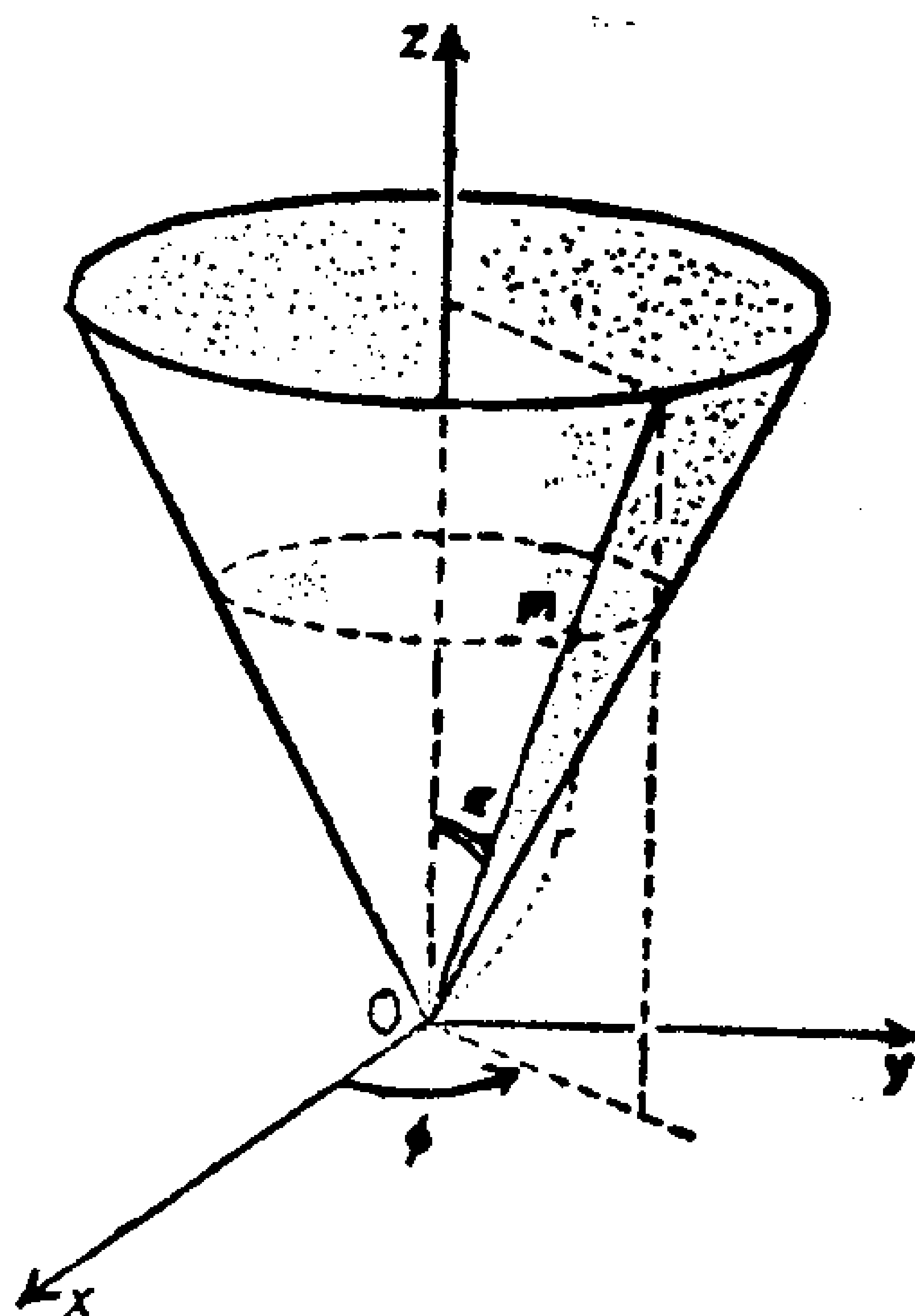


图 2-4

让我们通过简单例子来给出列拉格朗日方程的方法.

例题1 试求出沿着轴线铅直，顶点朝下的光滑圆锥面内侧滑动的质点运动方程. 设顶角为2α. 质点绕着一定高度的水平圆周回转条件是什么？在这种稳定运动的质点上，加上沿r方向的微小冲击力后，其运动又将如何？

〔解〕 这时，可取圆锥的顶点为极点，铅直向上方向为极轴的三维极坐标 r，θ，ϕ. θ 固定为$\theta=\alpha$.

由于 $(dr)_r=dr$，$(dr)_\theta\equiv 0$，$(dr)_\phi=r\sin\alpha d\phi$

故根据(1·39)式：

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)$$

此外，势能由

$$U=mgr\cos\alpha$$

给出. 因此，拉格朗日函数为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)\quad mgr\cos\alpha$$

建立运动方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=\frac{\partial L}{\partial r},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \phi}$$

能得到：

$$m\ddot{r}=mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha-mg\cos\alpha \tag{i}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha)=0\quad(\dot{p}_\phi=0) \tag{ii}$$

在水平圆周上转动时，由于$r=r_0$（常数），有$\ddot{r}=0$. 因此，由第二式可知，$\dot{\phi}$也为常数（记为Ω），这时第一式可表示为

$$mr_0\Omega^2\sin^2\alpha-mg\cos\alpha=0$$

所以

$$r_0\Omega^2=\frac{g\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \tag{iii}$$

即为所求的条件. 由于速度为$r_0\Omega\sin\alpha$，设其为v_0，则如果给出使得

$$\frac{v_0^2}{r_0}=g\cos\alpha$$

的初始条件就可以了.

为了考察偏离这样稳定运动的情况，首先设p_ϕ=恒量的恒量值为mC，则有

$$r^2\dot{\phi}\sin^2\alpha=C$$

故代入r的运动方程(i)消去$\dot{\phi}$后得：

$$\ddot{r}=\frac{C^2}{r^3\sin^2\alpha}-g\cos\alpha \tag{iv}$$

因此，取

$$r=r_0+\rho\quad(\rho\text{为微扰量})$$

代入后，保留到ρ的最低次（一次）项，得：

$$\ddot{\rho}=\frac{C^2}{r_0^3\sin^2\alpha}\left(1+\frac{\rho}{r_0}\right)^{-3}-g\cos\alpha$$

$$=\frac{C^2}{r_0^3\sin^2\alpha}\left(1-\frac{3\rho}{r_0}\right)-g\cos\alpha$$

在运动从稳定状态受到干扰时，不使p_ϕ变化，故C也是原来的值

$$C=r_0^2\Omega\sin^2\alpha \qquad \left(\because\frac{C^2}{r_0^3\sin^2\alpha}=r_0\Omega^2\sin^2\alpha\right)$$

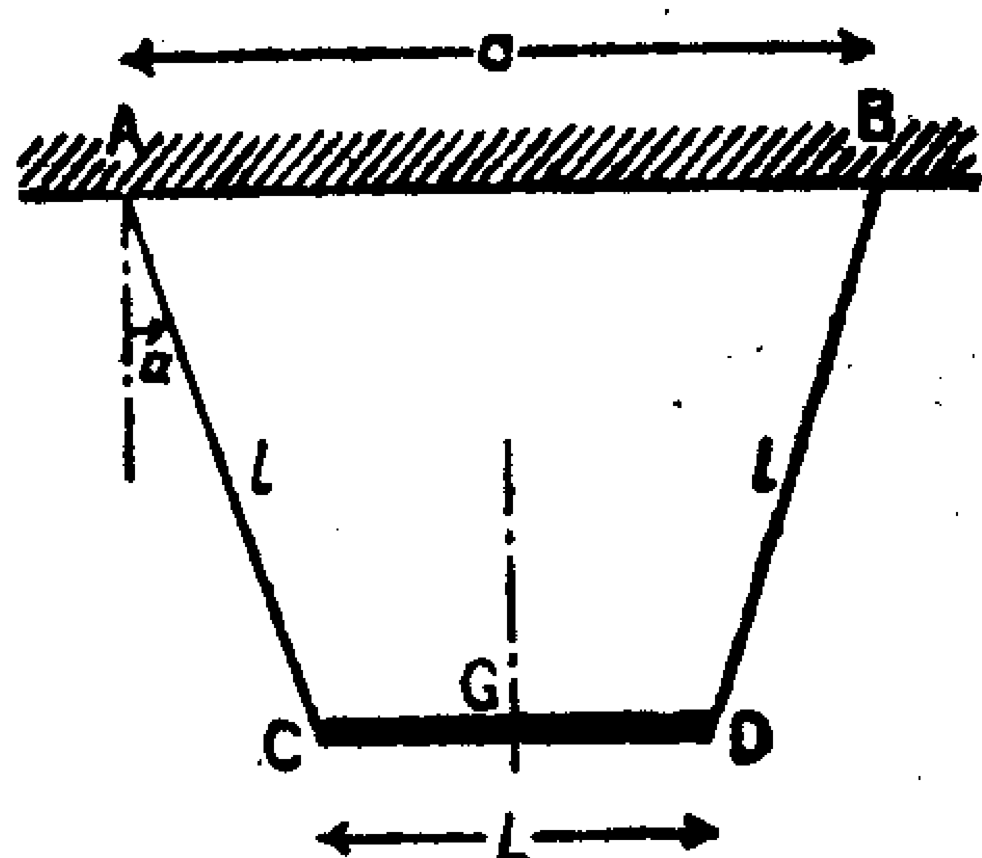
因此根据(iii)，上面的式子变为

$$\ddot{\rho}=-\frac{3g\cos\alpha}{r_0}\rho$$

所以ρ进行以角频率为 $\omega_0=\sqrt{(3g\cos\alpha)/r_0}$ 的正弦振动. 不难看出，其角频率为

$$\omega_0=(\sqrt{3}\sin\alpha)\Omega$$

例题2 在长度L的均匀棒的两端，分别系有长度l的线，线的另一端连接于水平距离为a的两个固定点A、B，悬挂住棒. 这种装置称为**双摆**. 将该棒绕重心由平衡位置开始稍稍扭转后再放开时，其振动将如何？设 $a>L$.



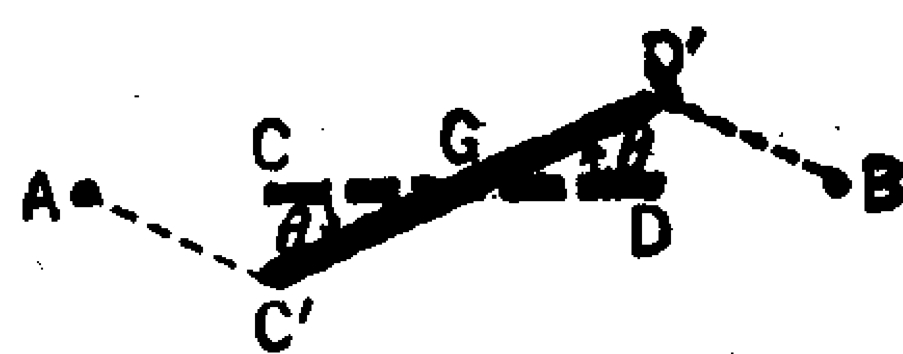


图2–5 双摆. 下图为从正上方看它的样子

〔解〕 设扭转角为θ，则广义坐标仅此θ即可. 当扭转时，棒的重心升高，故有必要将其高度z作为θ的函数求出来. 在平衡位置，线与铅直方向所夹的角α由

$$l\sin\alpha=\frac{1}{2}(a-L)$$

来确定. 设当棒扭转θ角时，线与铅直向下的方向之间所夹的角为α'，则根据余弦定理可求出图2–5下方图中AC′的长度：

$$l\sin\alpha'=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2-\frac{aL}{2}\cos\theta}$$

由于θ很小，故可设$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}$，

$$(l\sin\alpha')^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2-\frac{aL}{2}+\frac{aL}{4}\theta^2$$

$$=\left(\frac{a-L}{2}\right)^2+\frac{aL}{4}\theta^2=(l\sin\alpha)^2+\frac{aL}{4}\theta^2$$

因此，

$$l\cos\alpha'=\sqrt{l^2-(l\sin\alpha')^2}=\sqrt{l^2-(l\sin\alpha)^2-\frac{aL}{4}\theta^2}$$

$$=\sqrt{l^2\cos^2\alpha-\frac{aL}{4}\theta^2}=l\cos\alpha\left(1-\frac{aL}{4l^2\cos^2\alpha}\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=l\cos\alpha\left(1-\frac{aL}{8l^2\cos^2\alpha}\theta^2\right)=l\cos\alpha-\frac{aL}{8l\cos\alpha}\theta^2$$

所以可知：

$$z=l\cos\alpha-l\cos\alpha'=\frac{aL}{8l\cos\alpha}\theta^2$$

由于

$$\dot{z}=\frac{aL}{4l\cos\alpha}\theta\dot{\theta}$$

所以$\dot{z}^2\sim\theta^2\dot{\theta}^2$与$\dot{\theta}^2$比较为二级无穷小量。因此，在动能

$$T=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

当中，第一项可以略去．M为棒的质量，I为对通过重心、垂直于棒的轴的转动惯量，对于均匀棒的场合：

$$I=\int_{-L/2}^{L/2}x^2\frac{M}{L}dx=\frac{1}{12}ML^2$$

势能由

$$U=Mgz=\frac{MgaL}{8l\cos\alpha}\theta^2$$

给出．故：

课间小憩

拉普拉斯和拉格朗日

法国革命时期活跃在巴黎的数学家物理学家当中，经常被人们用来进行对比的是拉普拉斯（Pierre Simon de Laplace, 1749—1827）和拉格朗日（Joseph Louis Lagrange, 1736—1813）. 拉普拉斯作为一个数学天才为人们所称道，然而，他追求名誉的欲望和政治上丧失气节却遭到人们的非难. 他疏远了自己出生地的亲属和恩人，常常对人隐瞒自己微贱的出身，受到拿破仑的重用，全盛时代在《天体力学》的序言中赞颂皇帝，并呈献上《概率的分析理论》；但在其丧失地位之后，又讨好路易十八世，在拿破仑的放逐令上签名，撤回了《天体力学》的序言，又将《概率…》一书的献词改为奉献给路易十八世.

祖父是法国人，生于意大利的拉格朗日，其才能早就受到公认，在被萨尔基尼亚王和帕罗夏王任用之后，于1787年应路易十六世之招而移居巴黎，受到皇族及学院方面极大的尊敬，在卢浮宫内进行研究. 这时，爆发了1789年的大革命. 拉格朗日受到皇族的保护，但他也充分地理解了法国人民的苦难，期待着革命的成功. 他不与恐怖政治同流合污，深居简出，专心致力于研究. 不久，被任命为综合工科学校的数学教授和度量衡修正委员长. 因其才能及人品，直至革命后仍受到法国人民的尊敬. 拿破仑也对这位谦虚而不独断专行的老学者表示了最崇高的敬意.

$$L=\frac{ML^2}{24}\dot{\theta}^2 \quad \frac{MgaL}{8l\cos\alpha}\theta^2$$

拉格朗日方程为

$$\frac{ML^2}{12}\ddot{\theta}=-\frac{MgaL}{4l\cos\alpha}\theta$$

即：

$$\ddot{\theta} = -\frac{3ga}{lL\cos\alpha}\theta$$

所以可以看出，θ进行角频率为 $\omega=\sqrt{3ga/lL\cos\alpha}$ 的简谐振动.

§2-3 依存于时间的约束条件

来讨论一下由(2.6)式表示的那样包含时间的约束. 考虑到从简单的例子讨论容易弄明白，故来研究图2-6那样使单摆支点O′在水平方向运动时的情况. 设线长为l，倾角为θ时：

$$x=l\cos\theta,\ y=l\sin\theta+F(t) \quad (2.7a)$$

因此，

$$\dot{x}=-l\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{y}=l\dot{\theta}\cos\theta+F'(t) \quad (2.7b)$$

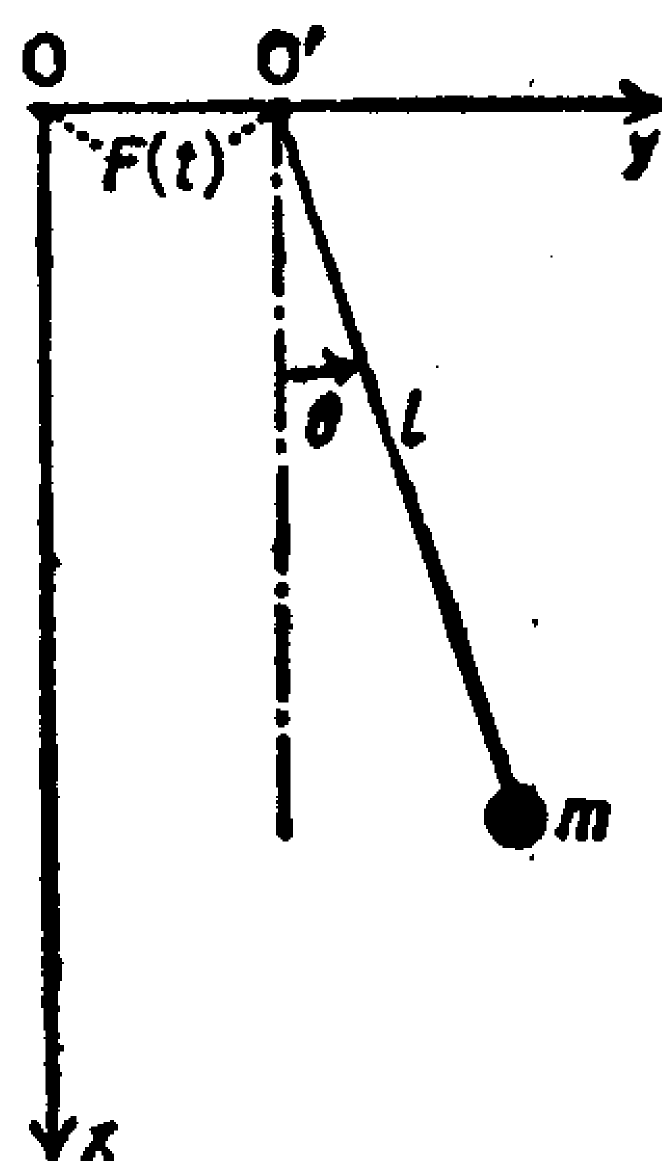


图 2-6

所以动能可表为

$$T=\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2+ml\dot{\theta}F(t)\cos\theta+\frac{m}{2}[F'(t)]^2 \quad (2.8)$$

$F'(t)$为$F(t)$的导函数. 不仅含$\dot{\theta}$，在第二项中包含θ. 由(2.7a)可马上看出，以(2.6)的形式表示出的这种场合下约束条件为

$$x^2+(y-F(t))^2-l^2=0$$

让我们参照上面的例子，进行一般性的讨论. 与(2.7a)对应的普遍式是将(1.26)普遍化的

$$x_i=x_i(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_f,\ t)\ (i=1,2,\cdots,n) \quad (2.9)$$

设在约束条件作用下，自由度由n减为f，q就有f个，使$q_1,q_2,\cdots,q_f$，t 分别有dq_1，dq_2，……dq_f，dt 的微小变化时，x_i 的变化为

$$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_f}dq_f+\frac{\partial x_i}{\partial t}dt \quad (2.10)$$

设dq_1，dq_2，…，dq_f为在dt时间内运动所引起的q_1，q_2，…，q_f的变化，将其除以dt得：

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_f}\dot{q}_f+\frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{2.11}$$

在(1.27)中没有的最后一项相当于(2.8)的$F'(t)$．之所以不将它写为dx_i/dt，是因为不考虑x_i通过$q_j(t)$与t发生依存关系；仅是对直接作为变数引入(2.9)的t微分而得的偏微分系数．

那么，根据(2.11)与(1.28)同样可马上得出：

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

这时，$\dot{x}_i$可看作q_1，…q_f，$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_f$，t的函数．

由于微功的(1.30)式仍保持不变，将(2.10)代进去得：

$$\delta W=\sum_i F_i dx_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{f}F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}dq_j+\sum_{i=1}^{n}F_i\frac{\partial x_i}{\partial t}dt$$

因此，使用与(1.31)同样定义的广义力时，它能写为

$$\delta W=\sum_{j=1}^{f}Q_j dq_j+\sum_{i=1}^{n}F_i\frac{\partial x_i}{\partial t}dt \tag{2.12}$$

右边的第二项，以图2-6的场合来说，表示的是从动的支点（通过线的张力）在dt之间加于摆上的功．因为Q_j的定义相同，故(1.34)也保持不变．

从(2.8)的例子看出，由于动能T除了q_j、$\dot{q}_j$之外还直接显含t，故共轭动量

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.35}$$

也直接包含t．因(1.28)可原封不动地使用，§1-5的变形式子也同样成立．故(1.41)式

$$p_i=\sum_j m_j\dot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i}+\sum_j m_j x_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \tag{1.41}$$

也能照样使用．另一方面，将(2.11)的i改写为j后对q_i进行偏微

分时，与前面不同，因为有最后的项，故成为

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial x_j}{dt}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)$$

由于x_i及$\partial x_j/\partial q_i$这些量除了通过$q_1(t)$，$q_2(t)$，…，$q_f(t)$形成$t$的函数之外，还直接依存于$t$，所以考虑到

$$\frac{d}{dt}=\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\frac{\partial}{\partial t}$$

时，上面的式子（与前面相同的形式）可以写为

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)$$

将此代入(1·41)右边的第二项得：

$$p_i=\sum_j m_j \ddot{x}_j\frac{\partial x_j}{\partial q_i}+\sum_j m_j \dot{x}_j\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$$

由于Q_i的定义保持不变，故右边的第一项为Q_i本身，第二项表示$\partial T/\partial q_i$，所以最后这个式子变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=Q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}\qquad\left(Q_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)$$

与(1·43)形状相同．可以知道，势能U变为$U(q_1, \cdots, q_f, t)$，(1·34)成立，故(1·43)～(1·47)也可原封不动地使用．

这样，拉格朗日做法的实用性越发变得明显起来．试以支点变动的摆为例来考察．若用牛顿的式子来解决时，需要考虑各种各样的问题，且易于发生谬误；而利用拉格朗日方程，可以如下那样完全机械性地处理．

动能由(2·8)式给出，势能为

$$U=-mgl\cos\theta$$

所以拉格朗日函数为

$$L=\frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{\theta}F'\cos\theta+F'^2)+mgl\cos\theta$$

因此，

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}+mlF'\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}+mlF''\cos\theta-mlF'\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-ml\dot{\theta}F'\sin\theta-mgl\sin\theta$$

可导出运动方程：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=-\frac{1}{l}F''\cos\theta$$

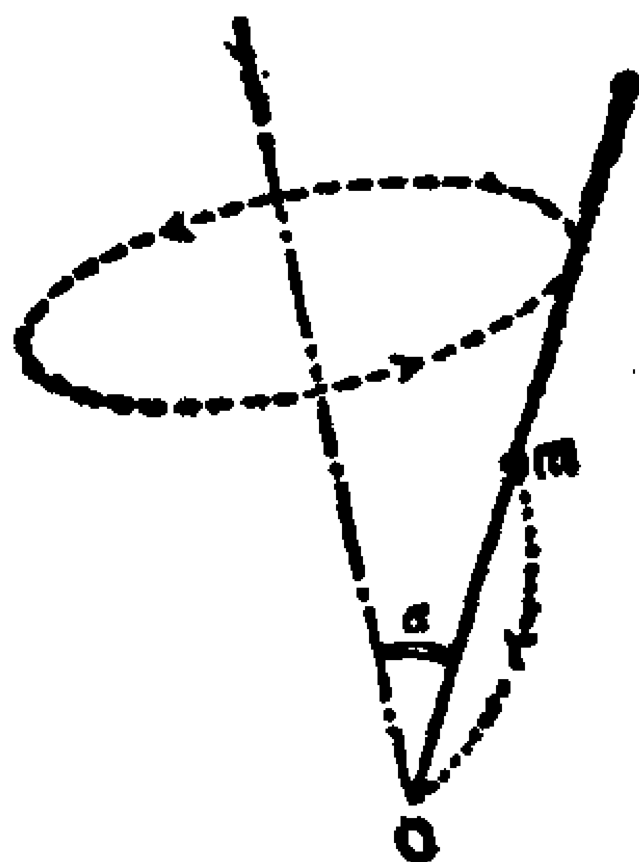
如果倾角在任何时候都小（$\sin\theta\doteq\theta$，$\cos\theta\doteq1$），支点运动$F(t)$为谐振动的话，设$F(t)=A\cos\omega t$，则成为熟知的受迫振动公式：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=\frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t$$

因为$F(t)=0$时的自由振动角频率为 $\omega_0=\sqrt{g/l}$，故$\omega=\omega_0$时，$\theta(t)$成为振幅与t成比例增大的振动，这是我们将摆拿在手中摇动时所体验到的．

问题 2 不用拉格朗日方程，怎样来解决图2–6摆的问题？

问题 3 试考察被约束在与铅直向上的轴保持α角（$<\pi/2$）、并以一定的角速度ω绕该轴回转的棒上的质点的运动。



问题3

§2-4 回转坐标系与洛仑兹力

当约束条件直接依存于时间时，笛卡儿坐标与广义坐标间的变换如(2.9)那样成为直接包含t的形式．虽与约束没有关系，作为同样包含时间变换的例子，让我们来考察一下回转坐标系．

取在$t=0$处与固定于空间的正交直线坐标系x，y，z一致，以角速度ω绕z轴回转的坐标系时，

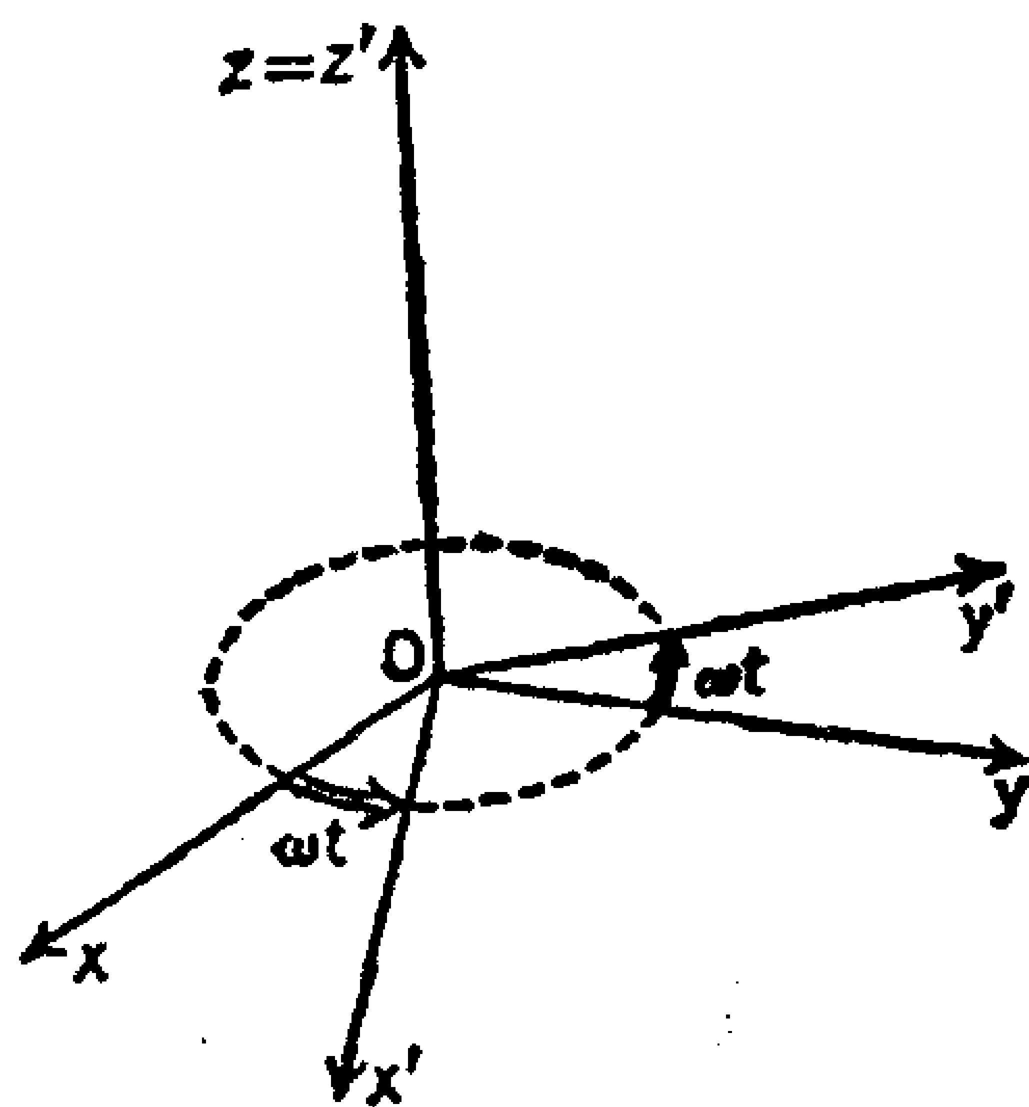


图 2-7

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\
y &= x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \\
z &= z'
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

的关系成立．将这个x'，y'，z'作为广义坐标来看待时：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{x}'\cos\omega t - \dot{y}'\sin\omega t - \omega(x'\sin\omega t + y'\cos\omega t) \\
\dot{y} &= \dot{x}'\sin\omega t + \dot{y}'\cos\omega t + \omega(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t) \\
\dot{z} &= \dot{z}'
\end{aligned}
$$

所以与(2.11)$\partial x_i/\partial t$相当的是右边（…）中的项．T为

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + m\omega(x'\dot{y}' - y'\dot{x}') \\
&\quad + \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

势能U为x，y，z的函数，在回转坐标系中也不包含$\dot{x}'$，$\dot{y}'$，$\dot{z}'$，

所以，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}'}\right)=\frac{d}{dt}(m\dot{x}'-m\omega y')$$

$$=m\ddot{x}'-m\omega\dot{y}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}'}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'}\right)=\frac{d}{dt}(m\dot{y}'+m\omega x')$$

$$=m\ddot{y}'+m\omega\dot{x}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}'}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}'}\right)=\frac{d}{dt}(m\dot{z}')=m\ddot{z}'$$

还有，

$$\frac{\partial L}{\partial x'}=m\omega\dot{y}'+m\omega^2x'-\frac{\partial U}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'}=-m\omega\dot{x}'+m\omega^2y'-\frac{\partial U}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z'}=-\frac{\partial U}{\partial z'}$$

所以，拉格朗日方程变为

$$m\ddot{x}'=-\frac{\partial U}{\partial x'}+2m\omega\dot{y}'+m\omega^2x'$$

$$m\ddot{y}'=-\frac{\partial U}{\partial y'}-2m\omega\dot{x}'+m\omega^2y' \qquad (2.15)$$

$$m\ddot{z}'=-\frac{\partial U}{\partial z'}$$

右边的第二项叫做**科里奥利力**．采用大小为ω而沿z方向的矢量ω时，可以归纳为

$$2m(\dot{r}'\times\omega)$$

的形式．它与相对于回转坐标系的相对速度$\dot{r}'$和ω这二者均垂直，大小与$2m|\dot{r}'|\omega\sin\theta$成比例，其中，$\theta$为$\dot{r}'$与$z'$方向之间的夹角．

(2.15)右边第三项是熟知的**离心力**，大小等于$m|r'|\omega^2\sin\theta$，指向是远离回转轴(z'轴)的方向．这两个力是由于坐标系回转而

产生的惯性力（表观力）(参照《力学》).

科里奥利力是依存于速度的力，与此相似的是带电粒子受到的磁场力．具有电荷e的粒子以速度$\boldsymbol{v}$在强度为$\boldsymbol{E}$的电场，磁通密度$\boldsymbol{B}$的当中运动时，可知它受到的力为：

$$\boldsymbol{F}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{2.16}$$

这叫做**洛仑兹力**.

如果$\boldsymbol{B}$是z方向的均匀场

$$B_x=B_y=0, \qquad B_z=B$$

由于$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x=\dot{y}B$，$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_y=-\dot{x}B$，设电场的势能为$\Phi(\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi)$，带电粒子的运动方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -e\frac{\partial\Phi}{\partial x}+eB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -e\frac{\partial\Phi}{\partial y}-eB\dot{x} \\ m\ddot{z} &= -e\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.17}$$

将它与(2.15)比较时，可以看到除去离心力的话，则对应得很好．由于离心力是(2.14)的最后项，考虑到科里奥利力是从它前面项导出的，可以看出能导出(2.17)的拉格朗日函数为

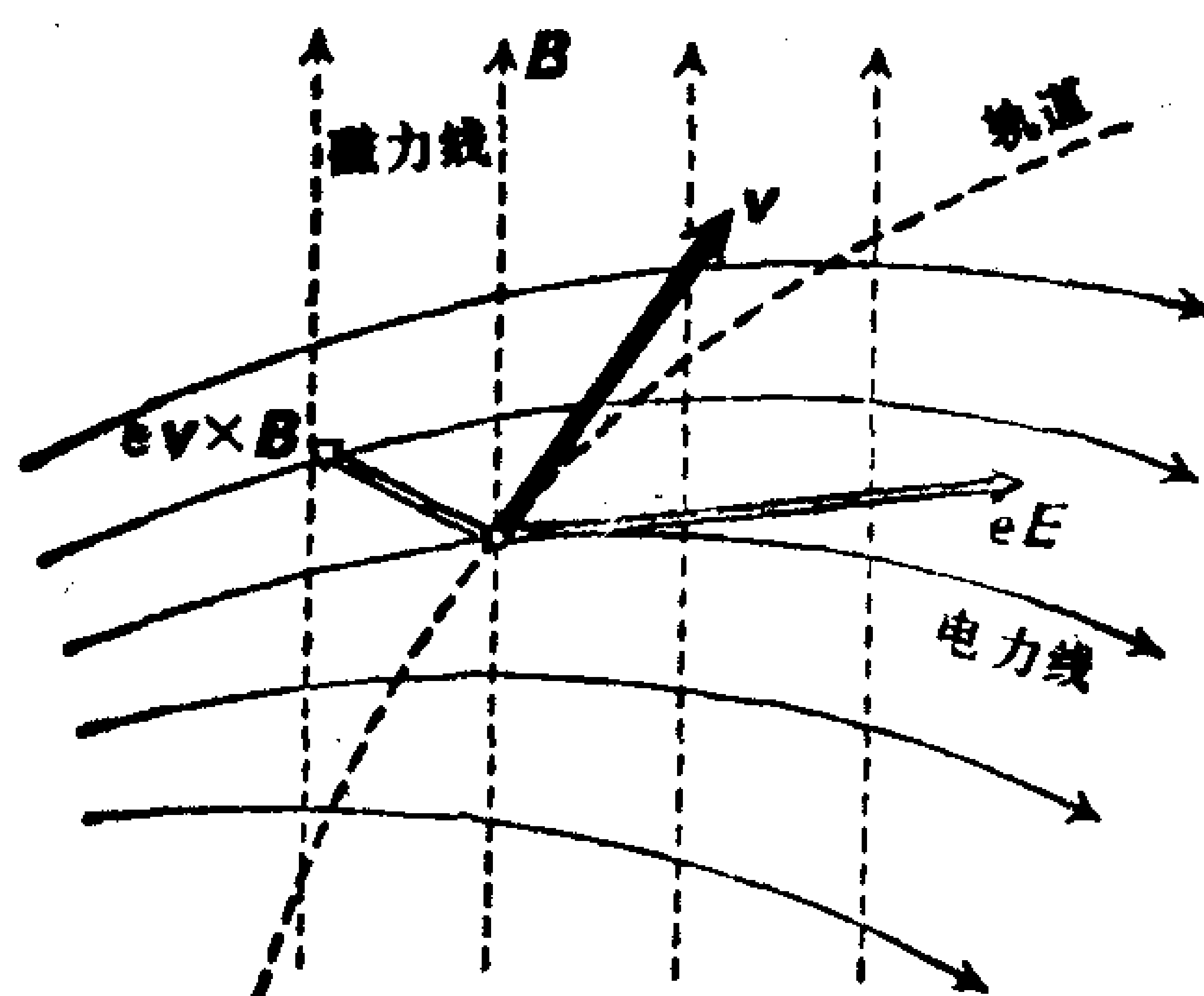


图2-8　洛仑兹力($e>0$的场合)

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{eB}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})-e\Phi \qquad (2.18)$$

例题1 证明从(2.18)式的拉格朗日函数可以导出运动方程(2.17)。

〔解〕 因为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}-\frac{eB}{2}y,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}+\frac{eB}{2}x,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

所以

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}-\frac{eB}{2}\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=m\ddot{y}+\frac{eB}{2}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)=m\ddot{z}$$

还有，

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{eB}{2}\dot{y}-e\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{eB}{2}\dot{y}+eE_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{eB}{2}\dot{x}-e\frac{\partial \Phi}{\partial y}=-\frac{eB}{2}\dot{x}+eE_y$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=-e\frac{\partial \Phi}{\partial z}=eE_z$$

因此，拉格朗日方程为

$$m\ddot{x}=eE_x+eB\dot{y},\qquad m\ddot{y}=eE_y-eB\dot{x},\quad m\ddot{z}=eE_z$$

从而给出(2.17)。

回转坐标系场合下的拉格朗日函数是从(2.14)T减去势能$U(x, y, z)$而得到的．如果U的函数形式是$\sqrt{x^2+y^2}$和z的函数的话（对z轴轴对称），由于$z'=z$，$x'^2+y'^2=x^2+y^2$，所以U在绕z轴的回转下不变，不因回转而产生随时间的变化。

$$U(x, y, z)=U(x', y', z')$$

因此，拉格朗日函数不显含t，呈现

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+m\omega(x\dot{y}-y\dot{x})$$

$$-U(x,y,z)+\{\omega^2\text{的项}\}$$

的形式．上标“′”全部舍去．

将其与(2.18)式比较，就容易导出以下的**拉莫尔定理**：

> 处在关于z轴轴对称电场内的带电粒子系上，进一步加上z方向均匀磁场(设磁通密度为B)时的运动，与从绕z轴以角速度$\omega=eB/2m$回转的回转坐标系看到$B=0$时的运动相同（在略去ω^2项的近似下）．

$\omega=eB/2m$称为**拉莫尔频率**．

对电磁学和矢量分析不太熟练的读者，目前可以先跳过本节的以下的部分．

为了表述磁场，多半采用满足

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

的矢量$\mathbf{A}(\boldsymbol{r},t)$．这个$A$称为**矢势**．

容易确定，由

$$A_x=-\frac{1}{2}B_y,\quad A_y=\frac{1}{2}B_x,\quad A_z=0$$

能得到z方向的均匀磁场B．

将此代入后，(2.18)为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+e(A_x\dot{x}+A_y\dot{y}+A_z\dot{z})-e\Phi$$

即

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+e(\mathbf{A}\cdot\dot{x})-e\Phi \qquad (2.19)$$

可象下面那样地确定这个式子对于更一般的磁场也成立．由于：

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}+eA_x,\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y}+eA_y,\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}+eA_z$$

故：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}+e\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)$$

y、z分量也类似.

这里，dA_x/dt与$\partial A_x/\partial t$不同在于是否考虑了$A_x(x,y,z,t)$的x，y，z也作为t的函数——随着带电粒子的运动——变化．此外，因为

$$\frac{\partial L}{\partial x}=e\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+e\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y}+e\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}-e\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

所以对x的拉格朗日方程为

$$m\ddot{x}=-e\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+e\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{y}-e\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\dot{z}$$

$$=-e\left(\nabla\Phi+\frac{\partial A}{\partial t}\right)_x+e\dot{y}(\mathrm{rot}A)_z-e\dot{z}(\mathrm{rot}A)_y$$

$$=-e\left(\nabla\Phi+\frac{\partial A}{\partial t}\right)_x+e(\dot{r}\times\mathrm{rot}A)_x$$

利用$B=\mathrm{rot}A$以及电场随时间变化的表达式

$$E=-\nabla\Phi-\frac{\partial A}{\partial t}$$

其它分量也一齐用矢量记号，可得：

$$m\ddot{r}=eE+e(\dot{r}\times B)$$

右边为(2.16)式的洛仑兹力．(2.19)的右边最末一项为该场合下的$-U$.

问题4 拉格朗日函数由(2.19)给出时，(1.48)变为什么样？

§2-5 耗散函数

科里奥利力和磁场产生的洛仑兹力，都是与物体速度成比例的力．由于其方向经常与速度垂直而不作功．因而，这类力的效

果是以(2.19)式右边第二项的形式被引进拉格朗日函数中.

现在让我们来考虑存在有与速度成比例的阻力(或者摩擦力)时的情形.用笛卡儿坐标来表示这样的力时,设k_i为正的常数,则有:

$$F'_i = -k_i \dot{x}_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

在有微小位移dx_1、dx_2、…、dx_n时,这样的阻力所作的(负)功,根据(1.30)应为

$$\delta' W = -\sum_i k_i \dot{x}_i dx_i$$

当这些位移是在dt时间内由于运动而产生的实际位移时,将其除以dt而得的

$$-\sum_i k_i \dot{x}_i^2$$

就表示单位时间由于阻力而失去的能量.将它的一半改变符号

$$D \equiv \frac{1}{2}\sum k_i \dot{x}_i^2 \tag{2.20}$$

定义为该系统的**耗散函数**.这是由瑞利(Lord Rayleigh)于1873年导入的.

利用这个耗散函数D,阻力可表示为

$$F'_i = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}$$

那么,当从笛卡儿坐标转移到广义坐标时,力也按照(1.31)而变换为广义力.

$$Q'_j = \sum_i F'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

在这里利用(1.28)时,可变形为

$$Q'_j = -\sum_i \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

所以,结果它归纳为完整的形式:

$$Q'_j = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$$

阻力以外的力能由势能U导出时，取$L=T-U$，将上面式子代入(1.46)的右边就行．因此，这种场合的拉格朗日方程取

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}=0} \tag{2.21}$$

的形式．

问题5　在用平面极坐标r、θ的场合，设$k=k_1=k_2$，耗散函数变为什么样？试根据它求出Q'_r与Q'_θ．受到有心力和这样的阻力而运动的质点，其面积速度如何随时间变化？

§2-6　欧拉角

如前所述，所谓刚体，可以认为是具有构成质点间的距离都保持一定的完整约束的质点组．其结果，刚体的自由度就变为6．这是因为：若能确定固定于刚体上的正交直线坐标$O'-\xi\eta\zeta$的话，利用确定O'位置的3个坐标和确定$O'-\xi\eta\zeta$方位的三个角度，就可以描述刚体的运动．经常使用的三个角度是在《力学》中导入的欧拉角θ，ϕ，ψ（图2-9）．本节来考察将它们作为广义坐标时的拉格朗日方程．

现在，设O点固定，刚体运动只有由θ、ϕ、ψ随时间的变化而描述的转动．这样一来，$\dot{\theta}$就表示绕y''轴的角速度，$\dot{\phi}$表示绕z轴的角速度，而$\dot{\psi}$则表示绕ζ轴的角速度．角速度用沿该回转轴与螺旋前进方向一致的矢量来表示．因而，当$\dot{\theta}$，$\dot{\phi}$，$\dot{\psi}$同时存在时，可用具有它们的大小，而分别沿着y''轴，z轴，ζ轴方向的矢量，按照平行四边形法则进行合成．设合成的角速度矢量为ω时，利用各个轴之间的关系，其x，y，z分量由

$$\omega_x=-\dot{\theta}\sin\phi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi$$

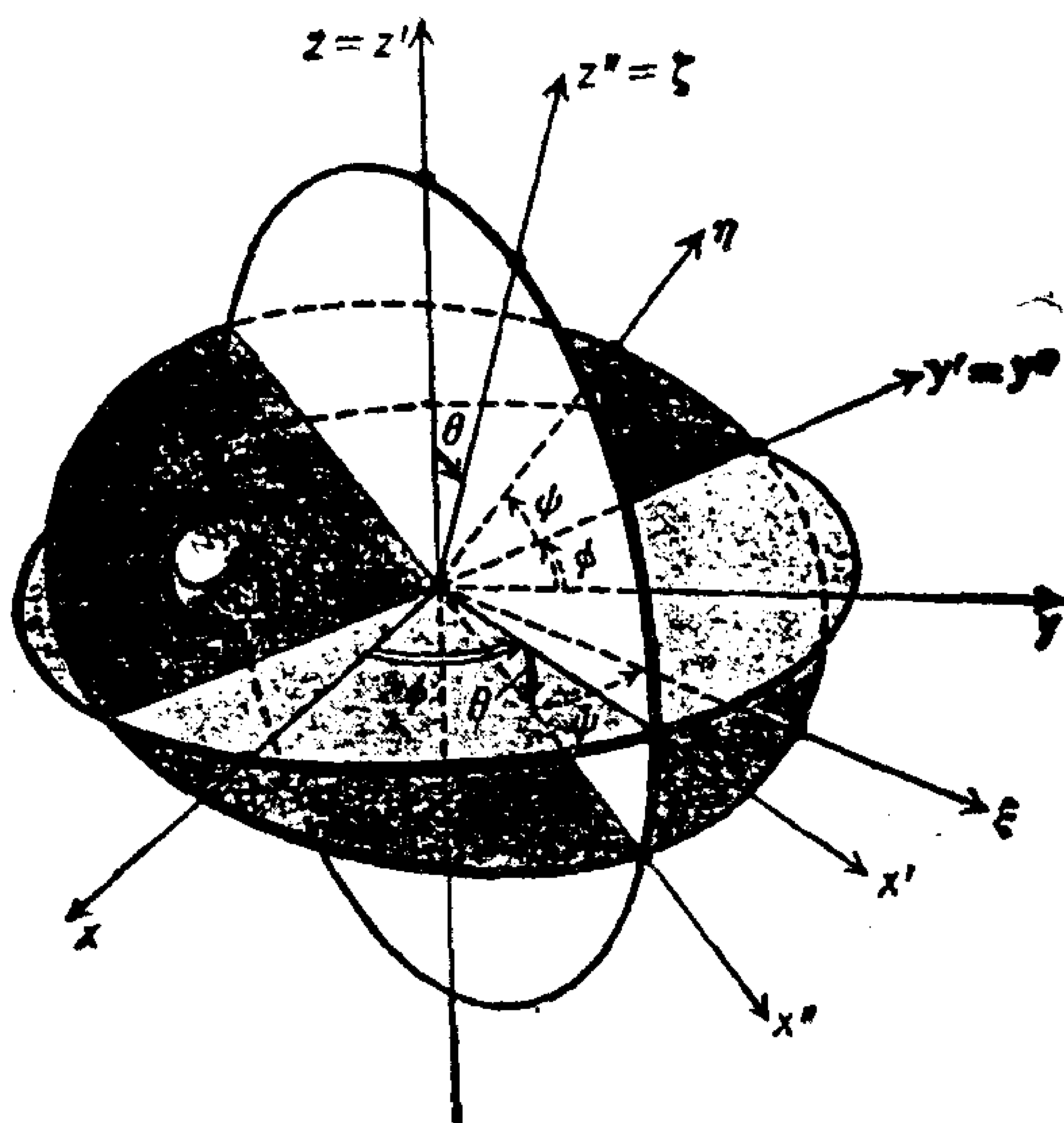


图2-9　欧拉角

$$\omega_y=\dot\theta\cos\phi+\dot\psi\sin\theta\sin\phi \qquad (2.22)$$

$$\omega_z=\dot\phi+\dot\psi\cos\theta$$

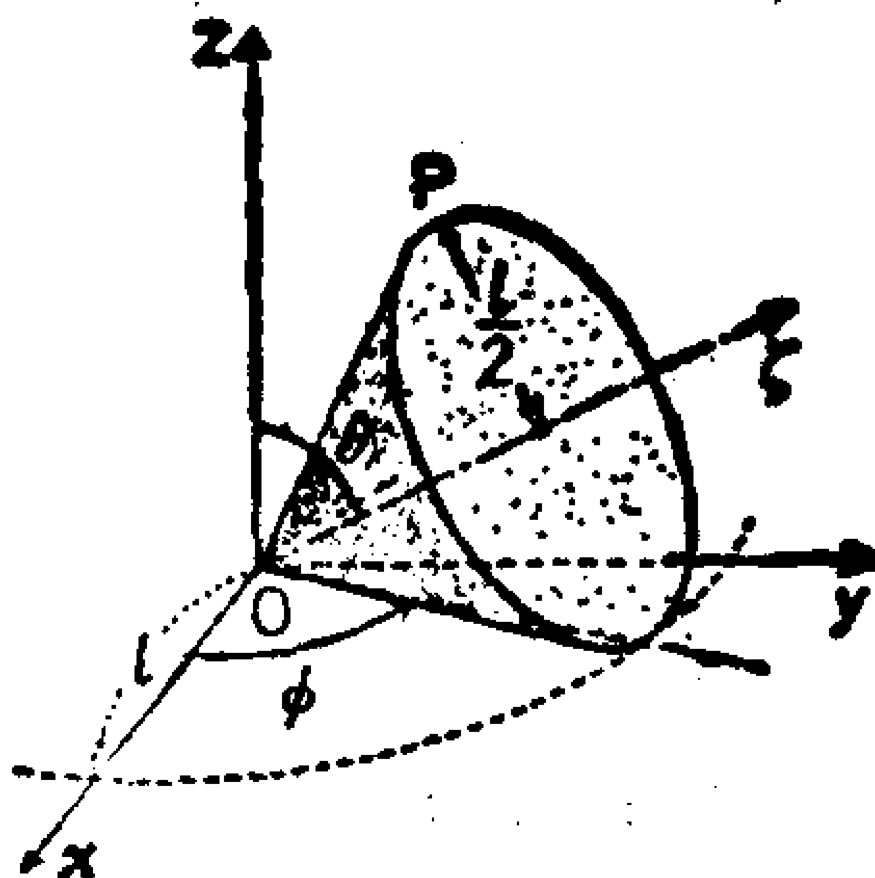
给出．同样将ω分解为ξ，η，ζ分量的话，有·

$$\omega_\xi=\dot\theta\sin\psi-\dot\phi\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega_\eta=\dot\theta\cos\psi+\dot\phi\sin\theta\sin\psi \qquad (2.23)$$

$$\omega_\zeta=\dot\psi\cos\theta+\dot\phi$$

这由O-xyz与O-$\xi\eta\zeta$的关系是很容易看出来的。



问题6　顶角为60°，底面直径为l的正圆锥，在水平面上均匀（图中的$\dot\phi=\Omega$恒定)滚动．将其用欧拉角表示时是什么样的情况？此外，在这一瞬间，图中P点具有的速度是多少？

作为欧拉角的应用例子，我

们来讨论《力学》第七章中出现的陀螺运动．若将欧拉角看做广义坐标，列出拉格朗日方程的话，就能够极机械地导出运动方程．

如图2-10那样，考虑以下端为固定点，一边受到重力一边回转的陀螺．取陀螺的轴为ζ轴，并取固定在陀螺上，通过O与其垂直的ξ轴、η轴．普通的陀螺都是使得绕ξ轴的转动惯量与绕η轴的转动惯量相等（轴对称的），设其为I_1，而设绕ζ轴的转动惯量为I_2．根据对称性，惯性积都为零，ξ η，ζ轴成为通过O的惯性主轴．这样，这个陀螺的动能如《力学》(7.17)式所示，由

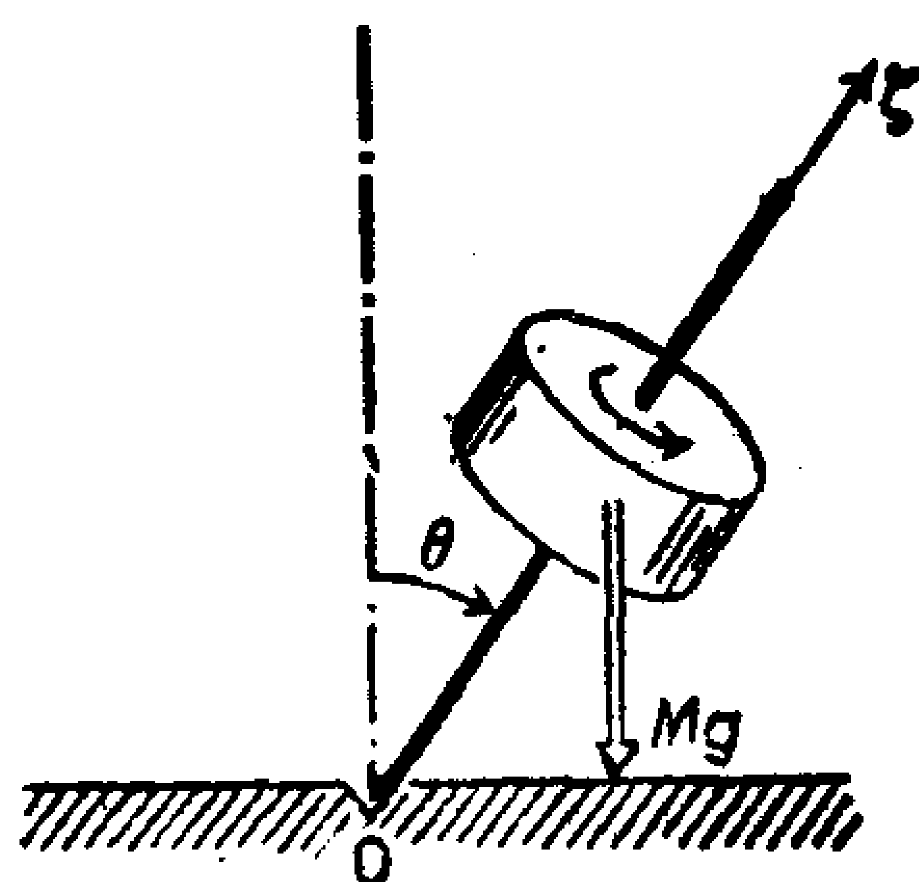


图 2-10

$$T=\frac{1}{2}\{I_1(\omega_\xi^2+\omega_\eta^2)+I_2\omega_\zeta^2\}$$

给出．

将(2.23)代进这里得：

$$T=\frac{1}{2}\{I_1(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+I_2(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi})^2\} \quad (2.24)$$

设陀螺重心在离最下端l的地方，陀螺的质量为M，则势能由

$$U=Mgl\cos\theta \quad (2.25)$$

给出．因为在$L=T-U$当中，不包含ϕ和ψ，故可知它们构成循环坐标．因此直接可得：

$$p_\phi\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=I_1\dot{\phi}\sin^2\theta+I_2(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi})\cos\theta=a(\text{恒量})$$

(2.26)

$$p_\psi\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=I_2(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi})=b \quad (\text{恒量}) \quad (2.27)$$

现在所考察的问题，是我们最初已事先说明的完整系统，约束与时间无直接关系．因此，$L=T-U$仅用θ，$(\phi,\ \psi)$，$\dot{\theta}$，$\dot{\phi}$，$\dot{\psi}$来

课间小憩

欧拉和力学

不言而喻，创立动力学的是牛顿，他对《自然哲学的数学原理》的叙述，因其几何学的文体风格而使得读者大伤脑筋。现在，我们读起来就更不乏其感了。欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）是这样说的：

"如果问到什么地方需要分析学，那么，力学正是特别需要它的领域。读者相信所表示出来的命题是真理，但并不能充分明确而正确地理解这些命题。因此，如果不依靠分析学，不通过分析的方法去解决问题的话，只要将同样的问题稍加变化，读者就不能够独立地去解答"。

这是基于他自身体验而提出来的。因此，欧拉着手将证明改写为分析性的方式，他在《力学》一书加上了《分析力学揭示的运动科学》的副标题出版（1736年）。这是研究质点动力学的书。他早就有建立一套质点、刚体、弹性体、流体、质点组等遍及所有范围力学理论的计划。在此之后，他又导出了关于非粘性流体流动的基础方程（欧拉方程）（1755年）；导入了转动惯量和瞬时轴的概念，创立了刚体力学（1760年）等，取得了很多成绩。他撰写的关于力学论文和书籍数目超过二百种。

表示，不包括t．对这样的系统，§1－6的讨论完全适用，所以能量守恒定律$T+U=E$（恒量）成立．

$$\frac{1}{2}\{I_1(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin\theta)+I_2(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi})^2\}+Mgl\cos\theta=E \quad (2.28)$$

若从(2.26)～(2.28)这三个式子消去$\dot{\phi}$和$\dot{\psi}$ 就能得到仅含θ和$\dot{\theta}$的式子，对它求解，就可以将$\dot{\theta}$表示成θ的函数．设其为

$$\frac{d\theta}{dt}=f(\theta)$$

则根据

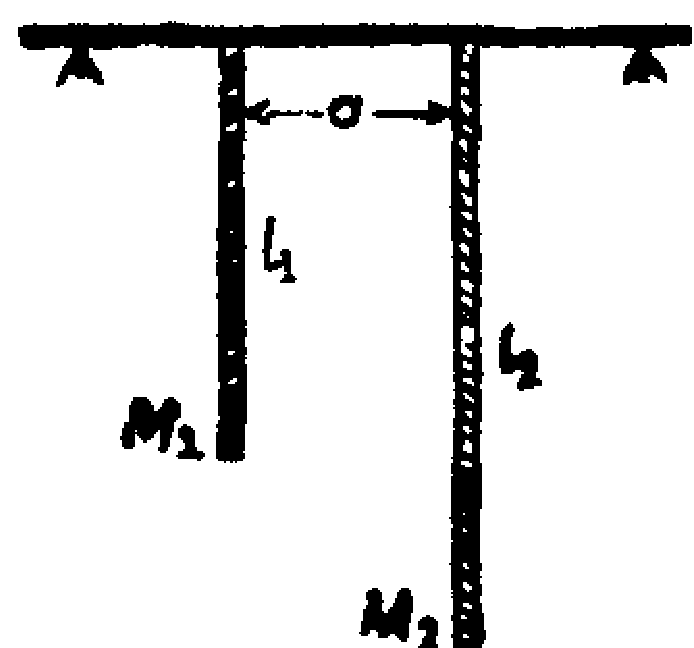
$$\int \frac{d\theta}{f(\theta)} = \int dt$$

能求出$\theta(t)$．在一般的场合，这种手续需要椭圆积分等特殊函数，并非轻而易举的事情．对于若干特殊场合，已在《力学》的第七章中讲过，请参照该处．

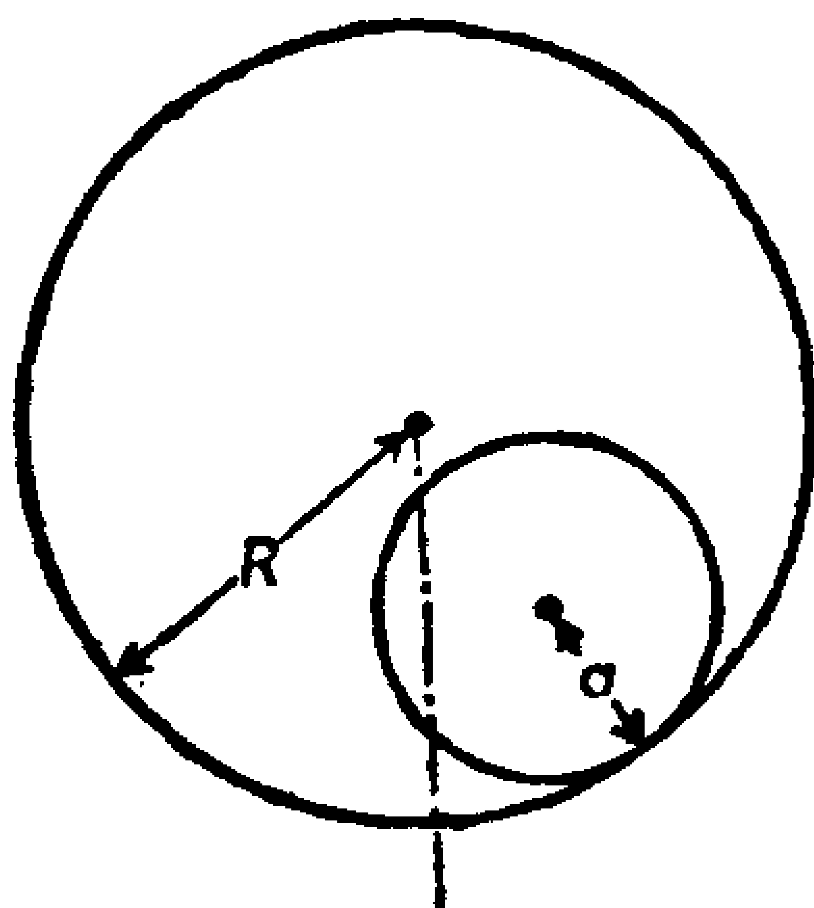
不用对θ的拉格朗日方程是因为使用能量守恒定律来代替了它．比起使用包含$\ddot{\theta}$的拉格朗日方程来说，利用已将它积分过一次而仅含$\dot{\theta}$和θ的**能量积分**(2·28)要省事得多．

习　题

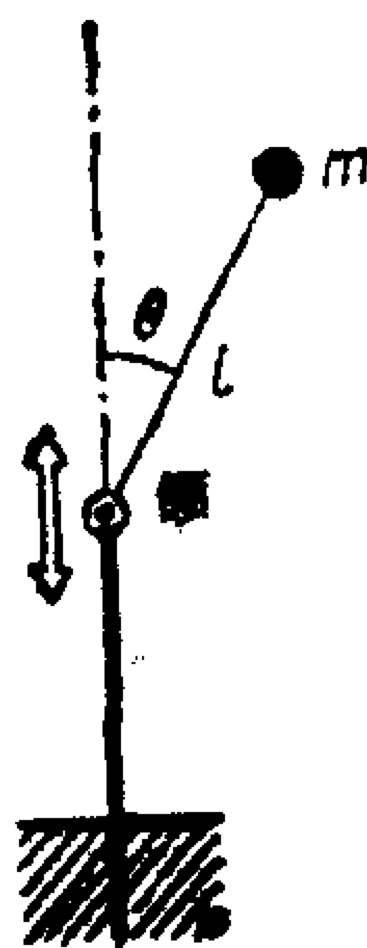
1．长为l_1、l_2，质量为M_1、M_2的刚体棒，其一端被固定于轻的第三个弹性棒上．固定的方式是：两根互相平行，与第三条棒垂直．固定点间的距离为a．弹性棒的两端被支撑住，保持水平．支点能够自由地回转．刚体棒铅直悬垂的状态为平衡状态，它们倾斜时就发生振动．设倾斜是在垂直于弹性棒的面内．由于倾角θ_1，θ_2不相等时弹性棒将发生扭曲，所以对其产生与$\theta_1-\theta_2$成比例的弹性力(扭矩)．请写出该系统的拉格朗日函数，并导出运动方程．



习题1



习题2



习题3

2．半径为a的均匀圆筒，轴为水平，被放在半径R的固定圆筒面的内．对于滚而不滑的运动：

(a) 求出拉格朗日函数.

(b) 求出运动方程.

(c) 计算在平衡位置附近的微小振动的周期.

假设$R>a$.

3．长为l的轻质刚体棒，一端固定质量为m的重物．另一端用光滑的合页连于活塞的上端．当活塞上端铅直地进行$a\cos\omega t$那样的振动时，棒与铅直方向间的倾角θ将遵循什么样的运动方程？

第三章　变分原理

在物理学的基本定律中．诸如几何光学中的费马原理（光选择所需时间最短的路径）那样以“使某个量变到最小或者最大而成立”这种形式表现的场合是很多的．从这样的见地来改述力学的原理，也将为我们提出一种新的展望．

§3-1　欧拉方程

有曲线$y=f(x)$时，该曲线在$x=a$到$x=b$之间的长度是将

$$ds=\sqrt{(dx)^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

在区间（a，b）中积分而得到的：

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$$

其中，

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

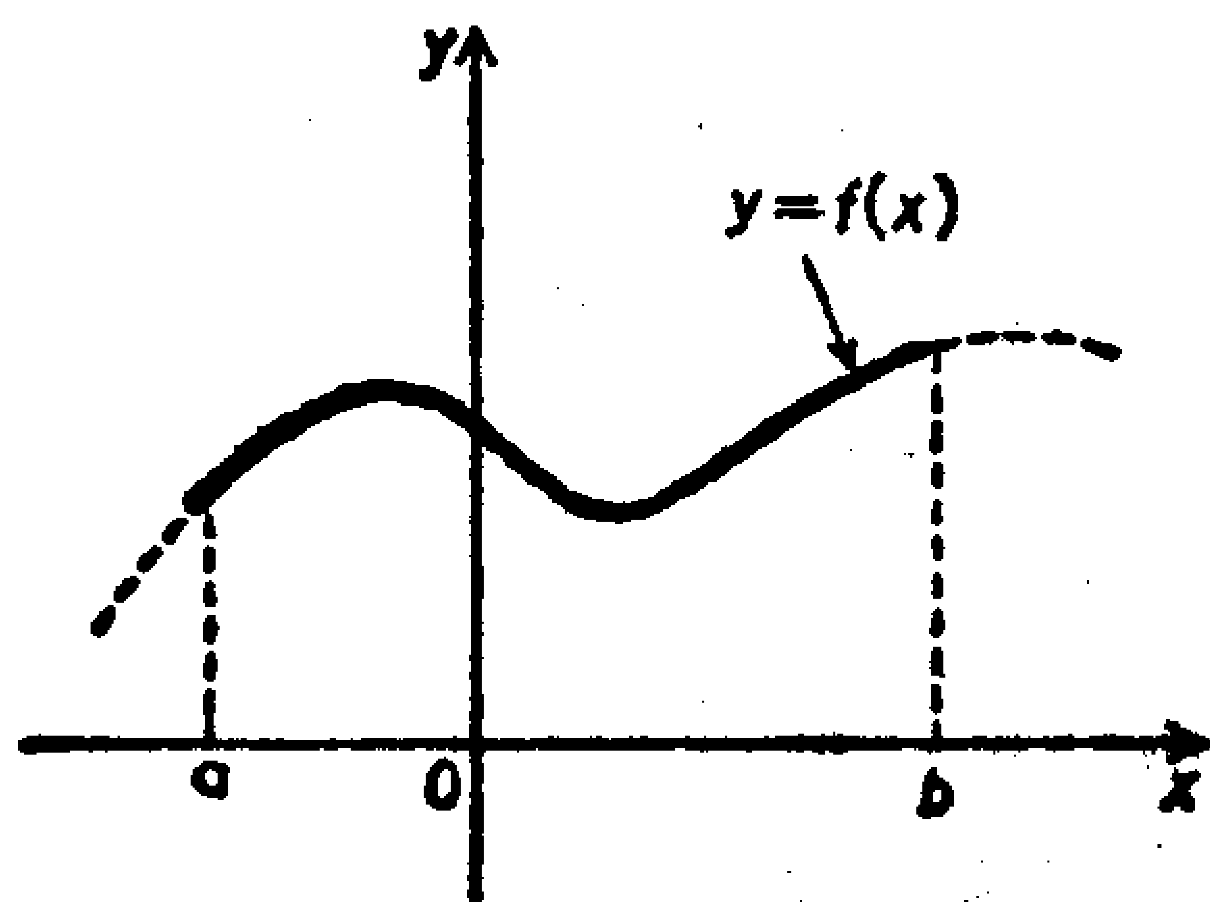


图3-1

此外，沿着该曲线存在线密度（每单位长度的质量）为σ的链条时，取y轴铅直向上，由a到b，链条具有的重力势能可用

$$U=\int_a^b\sigma gyds=\sigma g\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

来计算．在上例中，被积函数仅用y和y'表示，也可以考虑有包

含x的例子.

这样，当考虑在x的某个区间将x和y以及y'的函数$F(x, y, y')$——归根结蒂成为x的函数——进行积分而得

$$I=\int_a^b F(x,y,y')dx \tag{3.1}$$

时，它的值将随着$y=f(x)$的函数形式如何而不同．这时，I叫做函数$y=f(x)$的**泛函**．可以记为$I[y]$来表示它．随着x值的不同，y取不同值的是为函数，而由于函数形式的不同，I取不同的值，则是泛函．

在取函数的极大或极小值（一般为平稳值）时，在其附近，使x变化dx，则与之对应的y的变化$dy=(dy/dx)dx$为零．同样，在改变不同的$y(x)$函数形式以求I值时，若找到了使这个$I[y]$值为极大或者极小（平稳值）的$f(x)$的形式，利用那样的函数$f_m(x)$求得$I[f_m(x)]$时，那么，用与这个$f_m(x)$稍有偏离的函数$f(x)$计算得到的$I[f(x)]$与它之差——将其称为**变分**，记为δI——将变为零.

$$\delta I=I[f(x)]-I[f_m(x)]=0$$

那么，怎么样来求这样的函数$f_m(x)$呢？如果拿住长度一定的链条两端的话，链条将取使重力势能变至最小的形状，那将是什么形状呢？另外当两端给定时，人所皆知，连接它们的曲线当中，长度最短的是直线．然而，

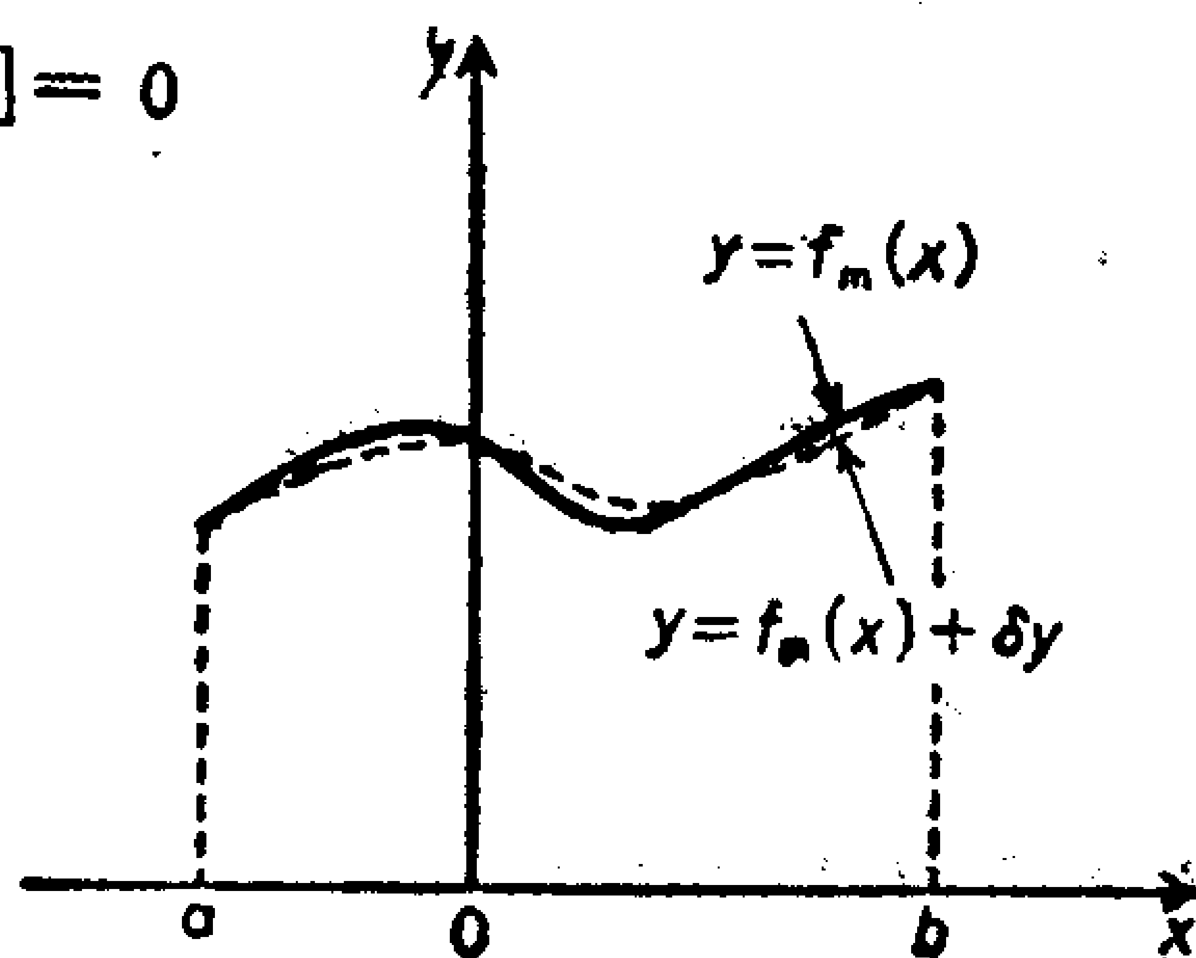


图3-2　如果实线的函数使I为极大或极小，那么取与其稍有不同的虚线所示的函数，I也会取相同的值.

怎么样来确认这一点呢？解决这类问题的就是变分法.

现在，设I由（3.1）式给出，将用$f_m(x)$求得的y和y'，也就是$f_m(x)$和$f_m'(x)$代入（3.1）计算得到$I[f_m]$.

$$I[f_m]=\int_a^b F(x,\ y,\ y')dx$$

设使用与$f_m(x)$稍微不同的$f(x)$求得的y和y'，也就是$f(x)$和$f'(x)$为$y+\delta y$，$y'+\delta y'$.

$$f(x)=f_m(x)+\delta y,\quad f'(x)=f_m'(x)+\delta y'$$

用这个$f(x)$计算得到$I[f]$为

$$I[f]=\int_a^b F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx$$

对于a和b之间所有的x计算$F(x,\ y+\delta y,y'+\delta y')$，再将其积分. 这样，变分$\delta I$可表为

$$\begin{aligned}\delta I&=I[f]-I[f_m]\\&=\int_a^b F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\,dx-\int_a^b F(x,y,y')dx\\&=\int_a^b\Big[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')\Big]dx\end{aligned}$$

然而关于三个变数x，y，y'的函数$F(x,\ y,\ y')$——例如$y\sqrt{1+y'^2}$，如果δy和$\delta y'$非常微小时，

$$F(x,y+\delta y,y'+\delta y')=F(x,y,y')+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

成立，所以上面的δI能写为

$$\delta I=\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\ \delta y'\right)dx \tag{3.2}$$

在考虑由$f_m(x)$稍稍偏离的$f(x)=f_m(x)+\delta y$时，δy怎么取都可以，象图3-2的虚线那样取也好. 反过来，左边较f_m往下，右边较f_m往上取也可以，上下起伏波动更大也没有关系. 这样，δy能够任意取（但要微小），但同时，$\delta y'$却不可以同样任意选取. $\delta y'$是由δy的取法而确定. 从而，可求出$\delta y'$与δy的关

系：

$$\delta y' = f'(x) - f'_m(x)$$
$$= \frac{d}{dx}\Big[f(x) - f_m(x)\Big] = \frac{d}{dx}\delta y$$

将其代入（3.2）式右边第二项，应用分部积分可知：

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{d}{dx}\delta y\right)dx$$
$$= \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

已经讲过，δy的取法是任意的，让我们象图3-2的虚线那样，在两端$x=a$和$x=b$处，选取f和f_m一致．那么：

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b = 0$$

将这样得到的结果代入（3.2）可得：

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx$$

如前所述，由于δy是任意的，即使对于例示出的各种δy选取方法中的任一种都有$\delta I=0$，就是加在$y=f_m(x)$上的条件．为此，$y=f_m(x)$对a、b间的所有x均必须满足

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \qquad (3.3)$$

于是，求使I取平稳值的函数$y=f_m(x)$的问题，就归结为寻找满足(3.3)的函数问题．将这个（3.3）称作对变分问题$\delta I=0$的**欧拉方程**．

例题1　试求连接xy平面内两定点A、B的曲线当中长度最短的曲线．

这种场合的I为

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

所以，

$$F(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$$

因此，

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

欧拉方程为

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

得到：

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{常数}\quad\therefore\quad y'=\text{恒量}$$

满足它的$y=f_m(x)$为x的一次式：

$$y=Cx+D$$

也就是直线．使之通过A、B两点即可确定C、D.

例题2 有高度不同的两点A、B．最初静止于高的A点一方的质点，在重力作用下沿光滑曲线滑至B点时，所需时间最少的是什么样的曲线（称为最速降线brachistochrone）？

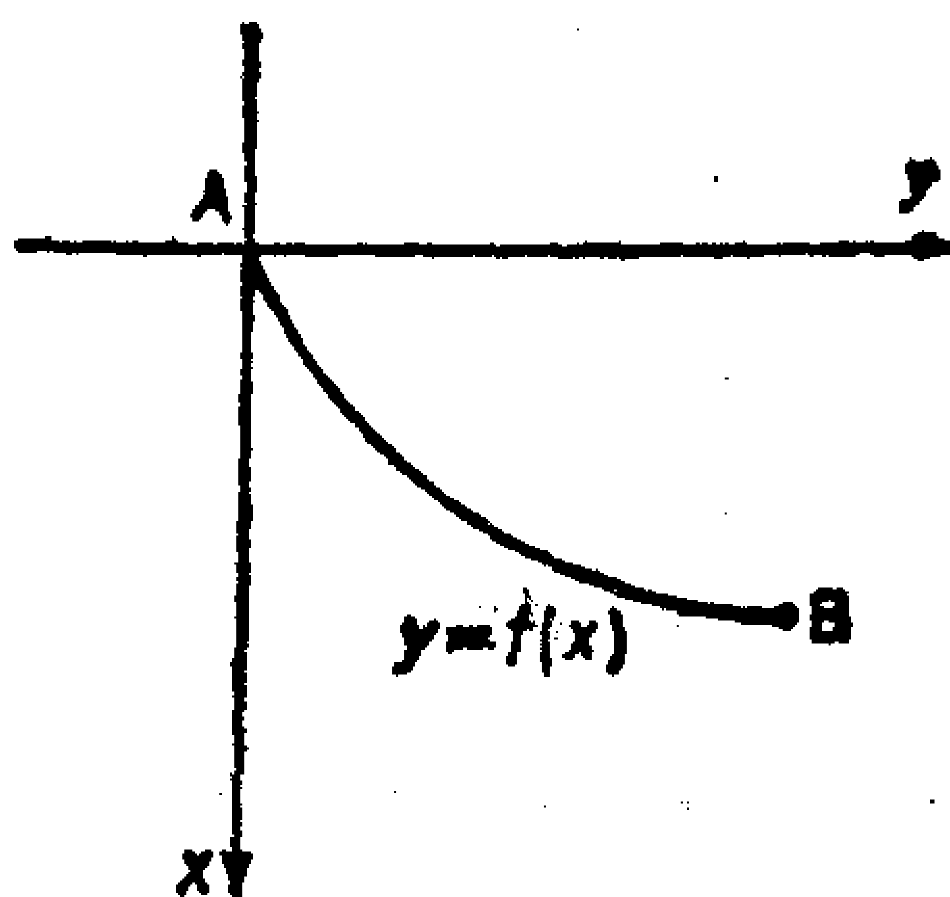


图3-3

［解］ 取A为原点，铅直向下为x轴，取y轴在水平方向，并使B点含于xy面内．在下降了x的地方，质点具有速度$\sqrt{2gx}$，所以下滑微小长度

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

所需要的时间为

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gx}}=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}dx$$

因此，问题在于求出使

$$I=\int_A^B\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}dx$$

为最小的$y=f(x)$．取

$$F=\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$$

作出（3.3），可得到：

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{y'^2}{x(1+y'^2)}}=0 \quad \therefore \quad \frac{y'^2}{x(1+y'^2)}=\text{恒量}$$

设右边的常数为$1/2a$时，有：

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

沿着y轴滚动的半径为a的圆周上一点描绘出的摆线(通过原点)，如果θ为回转角时，可用

$$x=a(1-\cos\theta),\quad y=a(\theta-\sin\theta)$$

来表示．将由

$$\frac{dx}{d\theta}=a\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$$

得到的 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

用x表示时，可以看出有：

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

因此，求得的最速降线是摆线．a的值是使之通过B而决定的(这个问题是1696年约翰·伯努利提出的，作为建立变分法的基础，在数学史上很有名)．

课间小憩

等周问题和变分法

"求出具有给定周长的平面图形中面积最大者"或者"求出在具有给定表面积值的立体中体积最大者"这一类问题称为等周问题。许多数学家进行了研究，在古代就弄清了这个问题的答案是圆和球。提出这类问题，引起了数学家的注意，并且建立起由欧拉和拉格朗日创立的变分法基础的人，是瑞士的伯努利兄弟。

弟弟约翰·伯努利研究的等周问题是最速降线，brachistochrone这个名称是希腊语的$\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau os$（"最短的"意思）与$\chi\rho\acute{o}\nu os$（时间）组合而成的词。他发现答案时，按照当时的习惯，将这个问题通知了全世界优秀的数学家，提出挑战，让大家解解看。莱布尼兹（Leibniz）接到了通知，在当天之中解决了这个问题。哥哥杰克·伯努利和牛顿也发现解答应为摆线。

然而，关于摆线，已由惠更斯（Huygens）详细地进行了研究，弄清了在该曲线上使质点从什么地方滑落，其下落时间都相同，所以约翰·伯努利为之惊叹不已，摆线振子的严格等时性已为人所熟知，根据这个理由，惠更斯将该曲线命名为等时曲线tautochrone（$\tau\alpha\upsilon\tau o$，相同的意思）。

最初列举的自古就有的等周问题是"具有给定周长"的附加条件的变分问题，解决它的所谓待定乘数法是由拉格朗日想出来的，本书由于没有使用的必要，故不加叙述。

§3-2 哈密顿原理

在上节中考虑了一个函数$y=f(x)$的泛函情况。有两个以上的函数$y_1=f(x)$，$y_2=g(x)$，…，$y_n=h(x)$，给出它们以及其导函数$y_1'=f'(x)$，$y_2'=g'(x)$，…，$y_n'=h'(x)$

的函数（结果仅为x的函数）

$$F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1' y'_2, \cdots, y_n')$$

时，很容易将其扩展到求出，使积分

$$I=\int_a^b F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y'_n)\,dx$$

取极值的$f(x)$，$g(x)$，…，$h(x)$的变分问题.

设：

$$\delta I=\int_a^b \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F}{\partial y'_i}\delta y'_i\right)dx$$

$$=\int_a^b \sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right)\right]\delta y_i\,dx$$

可得到欧拉方程——联立微分方程：

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)-\frac{\partial F}{\partial y_i}=0 \quad (i=1,2\cdots,n)} \tag{3.4}$$

想来，读者早就注意到了，这个欧拉方程与拉格朗日运动方程（1.45）正好是一模一样，只要将符号象下面那样对应起来就可以：

$$F \leftrightarrow L$$

$$x \leftrightarrow t$$

$$y_i(x) \leftrightarrow q_i(t)$$

$$y'_i(x) \leftrightarrow \dot{q}_i(t)$$

也就是说，所谓拉格朗日运动方程，无非是对

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)\,dt=0 \text{ 称} \tag{3.5}$$

这个变分问题的欧拉方程．积分上下限取运动过程中的任何时刻都可以．这件事表明：服从拉格朗日运动方程的运动——与遵循牛顿运动定律的运动相同——变成了使

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)\,dt \tag{3.6}$$

取极值的运动．也就是说，能够实现的运动是满足（3.5）那样的运动．这称为**哈密顿原理**．

例题1 一维简谐振子的拉格朗日函数由

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{m}{2}\omega^2x^2$$

给出．拉格朗日运动方程$m\ddot{x}=-m\omega^2x$的解由

$$x=A\sin\omega t \quad \left(周期=\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

给出．将这个$x(t)$在区间$0<t<\pi/\omega$中近似为**抛物线**有

$$x_1=\frac{4A\omega^2}{\pi^2}t\left(\frac{\pi}{\omega}-t\right)$$

其中，系数的确定是使在$t=\pi/2\omega$的x_1的极大值与x的值极大一致．试对这个$x(t)$和$x_1(t)$来验证

$$\int_0^{\pi/2\omega}L(x,\dot{x})dt<\int_0^{\pi/2\omega}L(x_1,\dot{x}_1)\,dt$$

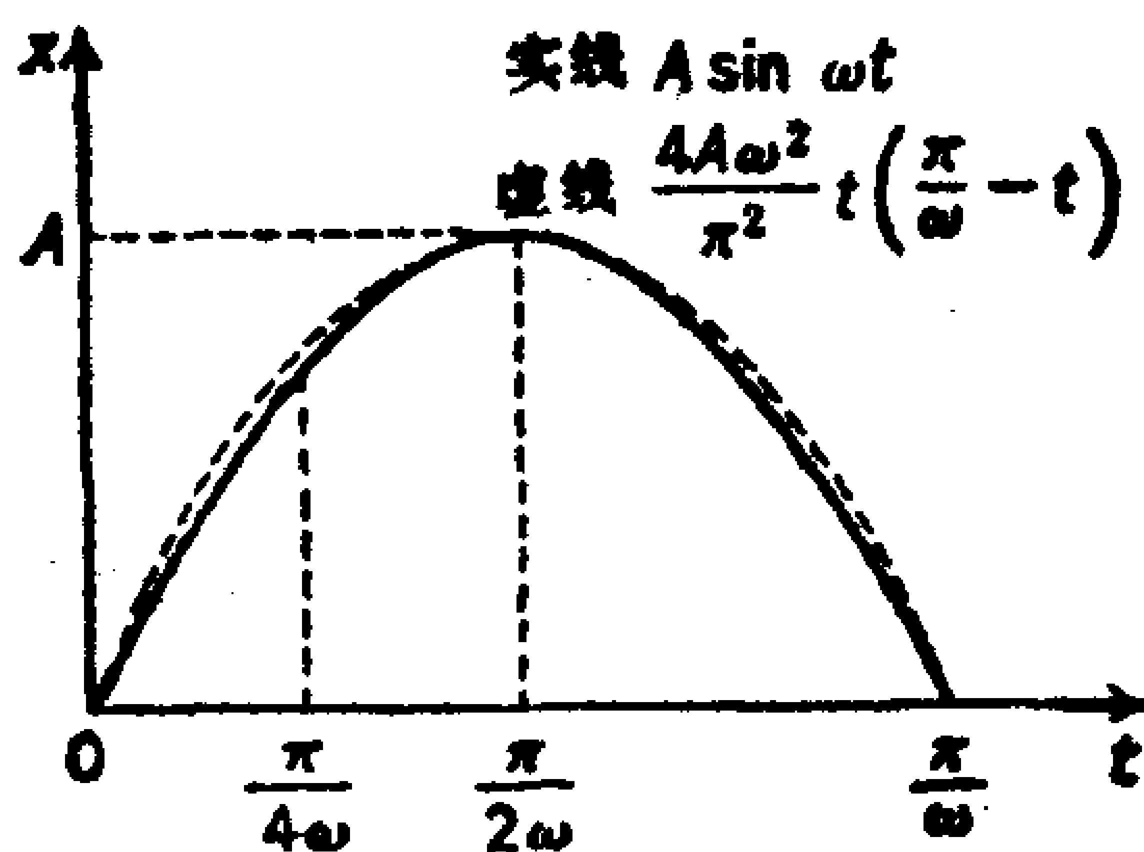


图 3-4

此外，试用两端一致的直线

$$x_2=\frac{4A\omega}{\sqrt{2}\pi}t$$

来取代$x(t)$的$0\leqslant t\leqslant\pi/4\omega$间的部分来验证哈密顿原理．

［解］求出$\dot{x}_1$，代入后得：

$$\frac{m}{2}\int_0^{\pi/2\omega}(\dot{x}_1^2-\omega^2x_1^2)dt=0.0055mA^2\omega$$

马上可看出，对$x=A\sin\omega t$有：

$$\frac{m}{2}\int_0^t(\dot{x}^2-\omega^2x^2)dt=\frac{m}{2}A^2\omega^2\int_0^t(\cos^2\omega t-\sin^2\omega t)dt$$

$$=\frac{m}{2}A^2\omega^2\int_0^t\cos 2\omega t\,dt=\frac{m}{2}A^2\omega\sin 2\omega t$$

所以，

$$\frac{m}{2}\int_0^{\pi/2\omega}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)dt=\frac{m}{4}A^2\omega\sin\pi=0$$

此外，

$$\frac{m}{2}\int_0^{\pi/4\omega}(\dot{x}_2^2-\omega^2x_2^2)dt=0.253mA^2\omega$$

$$\frac{m}{2}\int_0^{\pi/4\omega}(\dot{x}^2-\omega^2x^2)dt=\frac{1}{4}mA^2\omega$$

无论对哪一个来说，将$x(t)=A\sin\omega t$代入后都变小.

当力不为保守力，包含着拉格朗日函数L中没有的部分时，运动方程由（1.46）式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q'_i$$

给出．导出它的变分原理为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta L(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t)+\sum_i Q'_i\delta q_i\right]dt=0 \quad (3.7)$$

与前相同的讨论方法，能写出：

$$\delta L=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i$$

所以将它代入上式的话，在分部积分之后成为

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)+Q'_i\right\}\delta q_i\,dt=0$$

所以，$\{\cdots\}$内必须为零，从而得到（1.46）式．在保守力情况

下.

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

故可归纳为

$$\sum_i Q_i \delta q_i = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = -\delta U$$

而在非保守力Q'_i的场合，不能写出

$$\sum Q'_i \delta q_i = \delta(\cdots)$$

因此（3.7）不能写成

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[(q_1,\cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t)\text{的函数}\right]dt = 0$$

的形式．不将（1.32）式等的元功写为dW或δW而设为$\delta' W$，就是因为其没有q或$\dot{q}$的函数微小变化（全微分）的意义．

§3-3 最小作用原理

让我们回到约束条件不依赖于t，U不直接依存于速度$\dot{q}_i$和t的简单场合．设不能包含于$L=T-U$中的非保守力也不存在．可以有完整的约束力．

在这样的体系中，由 §1-6看到，能量守恒定律$T+U=E$成立．这样可以知道，在运动的过程中

$$L = T-U = 2T-(T+U) = 2T-E \tag{3.8}$$

成立．

在研究哈密顿原理时，假定过稍许偏离可能实现运动的运动．在可使之任意变化的那种运动中，不能保证能量守恒．试着用 §3-2例题 1 中举出的$x_1(t)$或$x_2(t)$来作

$$T+U = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2 \quad (i=1, 2)$$

的话，马上就可明白这一点．但是，在考虑哈密顿原理时，没有必要限制选取δq_i时要使其不与能量守恒定律发生矛盾．

如果在能够实现的运动中，(3.8)经常成立，若考虑与能量为E这个条件不矛盾的微小变化的话($\delta E=0$)，则有：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=2\delta\int_{t_1}^{t_2}Tdt=0$$

所以，所谓能够实现的运动是满足

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Tdt=0 \tag{3.9}$$

的运动．这样的结论对不对呢？实际上，这个结论是没有错的，但中途的推论过分简单，并不正确．我们来讨论一下理由．

在相同的能量条件下，为了实现与实际上能够发生的运动稍有不同的运动，要怎么办才行呢？例如说，设在自由的抛物运动中，质点作为由A到B的飞翔物体时，沿着与该抛物线稍许偏离的曲线（图3-5的虚线）固定一条光滑的金属丝，准备一个有孔的物体作为质点，金属丝通过孔，可以在A给一个与做抛物运动时相同的初速度使之顺利地滑行到B．这时由A走到B所需要的时间当然与抛物运动所需时间不同．这种场合，与图3-2对应的不是图3-5，若注意横轴为t、纵轴为x或者取y的$t-x$，$t-y$图时，象图3-2那样使两端一致是不可能的事情．

例题1 试比较一下以初速v_0，与水平成30°的方向上抛物体再次恢复到相同高度的抛物运动与沿着联结发射点、最高点、着地点的折线，使之以初速度v_0平滑运动这两种场合的情况．

［解］ 自由抛物运动有：

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0t,\quad y=\frac{1}{2}v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

容易求得：

最高点的高度　$h=\dfrac{v_0^2}{8g}$

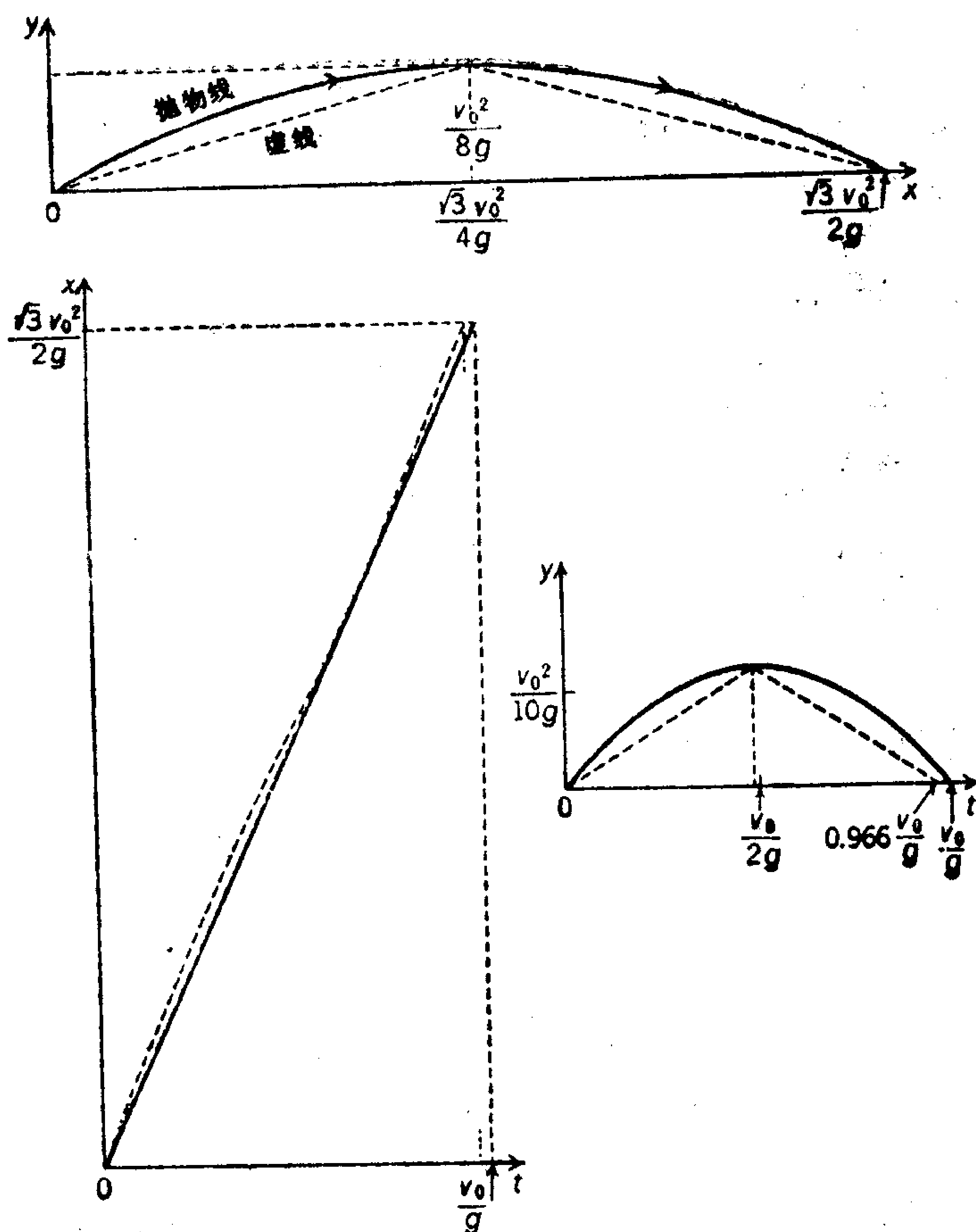


图3－5

到达最高点所需的时间$t_m=\frac{v_0}{2g}$

从发射点到着地点的距离$l=\frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}$

与这条抛物线和h以及l一致的折线，对水平约成16°6′的角，到达最高点所需要的时间为$0.483v_0/g$，可知它较之抛物运动要

短．其结果表示于图3-5中．

这样，由于所需要的时间不同，所以，在使实际运动路径上的各点与假想偏离的路径上各点一对一地对应时，就没有道理采用相同时刻的点．可以认为两端是对应的，当然应该使出发是在同一时刻t_1，但关于中途的情况，如果是图3-5的情况，使x相同（y不同）的点对应也行，使y相同（x不同）的点对应也没有什么不行．总而言之，要取适当的、尽量近的点来使之对应．

用笛卡儿坐标来考虑，设与实际路径上的点$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$对应的假想路径上的点为$x_1'(t'), x_2'(t'), \cdots, x_n'(t')$．因为$E$是恒量，故这时的速度$\dot{x}_1(t), \cdots, \dot{x}_n(t), \dot{x}_1'(t'), \cdots, \dot{x}_n'(t')$也可单值地确定．用

$$\delta\dot{x}_i(t) = \dot{x}_i'(t') - \dot{x}_i(t) = \frac{dx_i'}{dt'} - \frac{dx_i}{dt}$$

来定义$\delta\dot{x}_i(t)$．这样一来就有：

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_i(t) &= \frac{d}{dt'}\{x_i(t)+\delta x_i(t)\} - \frac{dx_i}{dt}\\ &= \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\{x_i(t)+\delta x_i(t)\} - \frac{dx_i}{dt}\\ &= \frac{dx_i}{dt}\left(\frac{dt}{dt'} - 1\right) + \frac{d}{dt'}\delta x_i(t)\end{aligned}$$

令 $\quad t' = t+\delta t$，则有

$$dt' = dt + d(\delta t)$$

所以有：

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{dt}{dt+d(\delta t)} = 1 - \frac{d(\delta t)}{dt} \qquad \left(\because \left|\frac{d(\delta t)}{dt}\right| \ll 1\right)$$

因此，

$$\delta\dot{x}_i(t) = -\dot{x}_i\frac{d(\delta t)}{dt} + \frac{d}{dt}\delta x_i(t) \tag{3.10}$$

在最后的项中，略去了高级无穷小量，将d/dt'换为d/dt．

我们要考虑的是将动能T从t_1到t_2积分而得的结果的变分——由于路径的变化而产生的积分的变化．

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1'}^{t_2'} T' dt' - \int_{t_1}^{t_2} T dt$$

将右边第一项的积分变数由t'变为t.为此可利用$dt' = dt + d(\delta t)$.进而设$T' = T + \delta T$，得：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} (T+\delta T)\{dt + d(\delta t)\} - \int_{t_1}^{t_2} T dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T d(\delta t) + \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \qquad (3.11)$$

略去了高级无穷小量.

在笛卡儿坐标中，$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$，所以它的微小变化可表示为

$$\delta T = \sum_i m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i \left(= \sum_i m_i \dot{x}_i(t) \delta \dot{x}_i(t) \right)$$

将前面的（3.10）代进这里得：

$$\delta T = -\sum_i m_i \dot{x}^2{}_i \frac{d(\delta t)}{dt} + \sum_i m_i \dot{x}_i(t) \frac{d}{dt} \delta_i(t)$$

所以：

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} 2T d(\delta t) + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} m_i \dot{x}_i(t) \frac{d}{dt} \delta x_i(t) dt$$

将右边第二项进行分部积分，在两端用$\delta x_i = 0$的条件，则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = -\int_{t_1}^{t_2} 2T d(\delta t) - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i dt$$

这里，着眼于$\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_i F_i \delta x_i$，由于平滑的约束力不作功，故利用可将$F_i$仅认为是保守力这一点而写出：

$$\sum_i F_i \delta x_i = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta U$$

现在考虑的变分是使$T+U$保持恒定，所以有$-\delta U = \delta T$. 结果，上式变为

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt = -\int_{t_1}^{t_2}2Td(\delta t)-\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt$$

故可知：

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt+\int_{t_1}^{t_2}Td(\delta t)=0$$

将其与（3.11）比较得：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Tdt=0 \qquad (3.12)$$

这个式子表示：在受到与时间无关的完整约束的质点组上，有保守力作用时，其可能实现的运动是在其附近考虑到的相同机械能量的各种路径当中，能够满足（3.12）式那样的运动．

将

$$\int_{t_1}^{t_2}2Tdt \qquad (3.13)$$

叫做由t_1到t_2所取的**作用积分**（或者**作用**），故上述原理叫做**最小作用原理**．（请注意，有的人将$\int Ldt$叫做作用）

§3-4 与费马原理的比较

让我们来考虑受保守力而运动的单个质点的场合．设沿着轨道的路程测得长度为s，速度为

$$v=\frac{ds}{dt}$$

所以用能量守恒定律：

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+U(r)=E$$

就得到：

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{2\{E-U(r)\}}{m}}$$

由此可知，能写出：

$$dt=\sqrt{\frac{m}{2\{E-U(r)\}}}\,ds$$

现在的场合，最小作用原理能写为

$$0=\delta\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt=\delta\int_{1}^{2}2\{E-U(r)\}dt$$

将上式代进这里的dt，再除以$\sqrt{m}$后得到：

$$\delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{2\{E-U(r)\}}\,ds=0 \qquad (3.14)$$

这个式子。

在几何光学中，**费马原理**将反射定律和折射定律汇总起来，并将其扩展到连续变化媒质的场合．其内容是："由一个定点发出到达另一定点的光线的路径，是对两端固定而中途进行连续的微小变化所得到的所有路径进行比较，使得光通过它所需要的时间变到极小（由于条件不同，也可是极大）那样的路径"．设作为位置函数的媒质折射率为$n(r)$时，那里的光速为c/n（c为真空中的光速）．因此，光前进ds所需要的时间可表为

$$\frac{ds}{c/n(r)}=\frac{1}{c}n(r)\,ds$$

由P点走到Q点所要的时间为

$$\frac{1}{c}\int_{P}^{Q}n(r)\,ds$$

由此可知，费马原理可写为

$$\delta\int_{P}^{Q}n(r)\,ds=0 \qquad (3.15)$$

将这个（3.15）与（3.14）进行比较时可以看出，在质点的运动路径与$\sqrt{2\{E-U(r)\}}$这个媒质中的光程相同。

还有，

$$\delta\int 2T\,dt=\delta\int mv^2\,dt=\delta\int mv\frac{ds}{dt}dt$$

所以最小作用原理可写为

$$\delta\int mvds = 0$$

莫培督提出了这种形式下的原理(1747).欧拉和哈密顿将这一原理进行一般化，并确定了最小作用原理及哈密顿原理．成功地把力学原理表示成和费马原理相同地变分原理形式．

习 题

1 考虑在均匀重力场中质点沿铅直方向的上下运动．设在时刻t_1和t_2，$x=0$．这时假定：

$$x(t)=C(t-t_1)(t-t_2)$$

试用它来计算

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x})dt$$

参数C可根据哈密顿原理用使S取极值(这一情况下为极小值)的条件选定．试用此法确定C.

注：这种场合，由于$x(t)$为t的二次式，故在此假定下能求出正确的$x(t)$．作为变分原理的一个应用，在正确的函数形式为未知时，可以假设一个估计在正确解附近的试验函数，在其中引入未定的参数以保留调节余地，选择该参数使得用它计算得的积分取极值而近似地求出未知函数．如果最初假设的试验函数形式适当的话，由此就有可能得到相当好的结果．

2．单摆的正确的拉格朗日函数为

$$L_0=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$$

设θ不太大，将$\cos\theta$展开至θ^4项，有：

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^4}{24}\right)$$

若舍去θ^4项，运动变为$\theta(t)\approx\sin\omega t$那样的简谐振动，角频率$\omega_0=\sqrt{g/l}$与振幅无关，保持恒定(摆的等时性).

取到θ^4为止时，$\theta(t)$不是简谐振动，周期也偏离$2\pi/\omega_0$．现在假设取到θ^4为止时试验函数为

课间小憩

力学中意识形态争论

受到关于光的费马原理启迪的莫培督(Pierre Maupertuis, 1698—1759)，从形而上学的、神学的论据出发导出了质量、速度与通过距离的乘积$\int mvds$在运动时取最小值的最小作用原理。最初的形式是表述出只有它才能显示出神的存在和先知。与他相独立的导出适用于更广阔范围内正确的最小作用原理的是欧拉，但是欧拉却承认了对莫培督的优先权。

18世纪中叶，支持决定论、唯物论世界观的与信奉目的论、神学观念的人们之间，就最小作用原理展开了“意识形态”的争论。欧拉支持莫培督，与沃泰尔(Voltaire)及达兰贝尔(d'Alembert)相对立。争论的结果，最小作用原理从形而上学中解放出来，在著名的《百科全书》的“宇宙论”这一项中，达兰贝尔强调了“这是完全数学性的原理”。最小作用原理不久又由拉格朗日比欧拉更进一步地扩展成为一般性的质点组的形式，有了固定的表达式。

$$\theta(t)=A\sin\omega t \tag{i}$$

ω随着A的不同而不同。反过来也可以说，可通过ω来确定A。现在，将周期变为$2\pi/\omega$的(不是简谐振动)振动象(i)那样近似的话，在一个周期的开始和终了($t=0$，$t=2\pi/\omega$)时，(i)与正确的函数一致，有$\theta(0)=\theta(2\pi/\omega)=0$。因此，为了使在中间过程中尽量接近正确的$\theta(t)$而确定$A$，希望利用哈密顿原理，试通过这种方法导出

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}\left(1-\frac{A^2}{16}\right)}$$

第四章　正则方程和正则变换

在这一章里要学习的不是象拉格朗日方法那样在实用的计算当中起作用的内容．其目的并非去求解问题，而是研究方程本身的性质，弄清与更广泛的、各种各样领域之间的联系．通过力学的这种形式也可以与量子力学和统计力学联系起来．正是为了这个目的，我们请诸位学习本章的内容．

§4-1　广义动量和循环坐标

今后所考察的仅限定于运动方程由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{4.1}$$

给出时的情形．讨论完整性约束力，但不存在必须使用耗散函数那样阻力的情况．

在第二章已强调过，使用广义坐标的优点在于易于处理约束．下面我们将要考察第一章中所定义的广义动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4.2}$$

的使用价值．在受有心力而运动的质点的场合，平面极坐标较之笛卡儿坐标更为方便是由于

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r)$$

其中含有$\dot{\theta}$而不包含θ的缘故．为此，将（4.1）对θ写出时有：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

在$\partial L/\partial\theta=0$情况下，有$(d/dt)p_\theta=0$，故能够直接得到积分：

$$p_\theta = \text{恒量}$$

根据它和$p_\theta=mr^2\dot{\theta}$，可以说$\dot{\theta}=$（常数）$/r^2$；由于$\dot{\theta}$也能消去而改写为$r$的式子，所以以后仅需求关于$r(t)$的方程即可．但是，笛卡儿坐标做不到这一点．

自由度为f系统的拉格朗日函数为$L(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1\cdots, \dot{q}_f, t)$，除去以后需要特别注意的场合，写这样的式子时，将$\{q_i\}$和$\{\dot{q}_i\}$总括起来用$q$、$\dot{q}$表示，记为$(q, \dot{q}, t)$的形式．这样，在$L(q, \dot{q}, t)$不包含$q_j$时，有：

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\text{常数}$$

所以若与有心力场合时的p_θ同样处理的话，对于完成以后的计算有用处．如 §1-6的末尾所述，这样的q_i叫做**循环坐标**．与$(x,y)\to(r, \theta)$时相同，利用能使尽量多的坐标成为循环坐标的q_1，q_2，…，q_f是为上策．

与此相联系，欲充分利用广义动量的特长时，可以采取下述的哈密顿做法．

广义动量由（4.2）所定义，L为$L(q, \dot{q}, t)$，所以p_i也为q、$\dot{q}$和t的函数．那么，列出（4.2），将联立的f个式子：

$$\begin{aligned} p_1&=p_1(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f, t) \\ p_2&=p_2(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f, t) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_f&=p_f(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f, t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

看作关于未知数$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_f$的联立方程求解的话，则$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_f$可作为q_1，…，q_f，p_1，…，p_f和t的函数而求出．用简略记号写出的话，有：

$$\dot{q}_1=\dot{q}_1(q, p, t)$$

$$\dot{q}_2=\dot{q}_2(q, p, t)$$

$$\cdots\cdots\cdots \tag{4.4}$$

$$\dot{q}_f=\dot{q}_f(q, p, t)$$

例题1 在三维极坐标(r, θ, ϕ)中，对于力与速度无关的场合，试用p_r，p_θ，p_ϕ来表示$\dot{r}$，$\dot{\theta}$，$\dot{\phi}$. 并用它将T改写为$T(q, p)$的形式.

[解] 由于拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)-U(r,\theta,\phi)$$

所以和(1.40)式表示的一样表示为

$$p_r=m\dot{r},\quad p_\theta=mr^2\dot{\theta},\quad p_\phi=mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

由此，

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m},\quad \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2},\quad \dot{\phi}=\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}$$

因而

$$T=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi^2\right)$$

如果是有心力，由于$U=U(r)$，故$L=T-U$中不包含ϕ，因此ϕ为循环坐标，$p_\phi=$常数.

问题1 试在笛卡儿坐标中求出在磁通密度$B=\mathrm{rot}A$给出的磁场中运动的带电粒子(质量m，电荷e)的广义动量.（对电磁学和矢量分析不熟悉的读者可以略去此题.）

§4-2 哈密顿正则方程

前面在§1-6中导出了能量守恒定律，当时讨论即使有完整约束，但它与时间无关的情况下都成立. 这是因为在该场合，$L(q, \dot{q})$当中不直接含有t. 这样，(1.48)式除了关于对i求和变为$i=1, 2, \cdots, f$之外，完全原封不动的成立.

因而，也包括L直接显含t的场合，定义一个新的量$H=\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$，这样做，$H$就能用$\{p_i\}$，$\{q_i\}$，$\{\dot{q}_i\}$和$t$来表示，所以用（4.4）、$\{q_i\}$和$\{p_i\}$来表示$\{\dot{q}_i\}$时，$H$变为$H(q, p, t)$.

$$\boxed{H(q,p,t)=\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)} \tag{4.5}$$

将它称作系统的**哈密顿函数**或**哈密顿量**.

我们来举出几个哈密顿算符的例子.

一维谐振子：

因为，

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad p_x=m\dot{x}$$

所以，

$$H=\frac{1}{2m}p^2{}_x+\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{4.6a}$$

三维有心力场内的粒子：

若参照上节的例题1，容易得出：

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi^2\right)+U(r) \tag{4.6b}$$

磁场内的带电粒子：

参照上节的问题1，利用§2-4例题1的结果（当然，直接从（4.5），（2.19）导出也很简单）：

$$H=\frac{1}{2m}\{(p_x-eA_x)^2+(p_y-eA_y)^2$$

$$+(p_z-eA_z)^2\}+e\Phi \tag{4.6c}$$

在力依存于速度的场合，需要注意$\boldsymbol{p}$不等于$m\dot{\boldsymbol{r}}$. 矢势$\mathbf{A}$也好，标势Φ也好，都是x、y、z、t的函数.

通过这些例子可以看出，在$\{x_j\}$和$\{q_j\}$的关系中不直接显含t时，由于T为$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_f$的二次齐次式，故：

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$$

成立．**由于，**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

所以，

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = 2T$$

哈密顿函数无非就是总能量：

$$H = 2T - (T - U) = T + U \tag{4.7}$$

拉格朗日运动方程就是对于哈密顿原理的欧拉方程 现在让我们来讨论用哈密顿函数表示哈密顿原理．为了导出拉格朗日方程，设求得的能够实现的运动为$q_j(t)$，在使中途的路径由它稍许改变一点时，利用$\int L dt$的变化为零($\delta\int L dt = 0$)这种方法．这时改变的只是q_1，q_2，…，q_j，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_f$的变化$\delta\dot{q}_j$利用由δq_j得到的值．

哈密顿函数是q_1，q_2，…，q_f与p_1，p_2，…，p_f——都是t的函数——的函数，所以在实际运动当中，q的变化与p的变化不能没有关系．但是，在哈密顿函数这种情况下，是将它认作$2f$个变数q_1，…，q_f，p_1，…，p_f（由于约束与时间有关等原因，时间t也有可能直接包括进去）的函数，可看为是以$2f$个变数为坐标轴抽象的$2f$维空间内的每一点上取给定值的函数．将这个$2f$维空间称为**相空间**．例如，在一维谐振子情况下，由于哈密顿算符由（4.6a）式给出，故进行能够实现的运动时，p_x与x满足：

$$\frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E$$

将其改写为

$$\frac{p_x^{\,2}}{2\,mE}+\frac{x^2}{2E/m\omega^2}=1$$

就可看出，运动在该场合可用二维相空间中的椭圆表示。

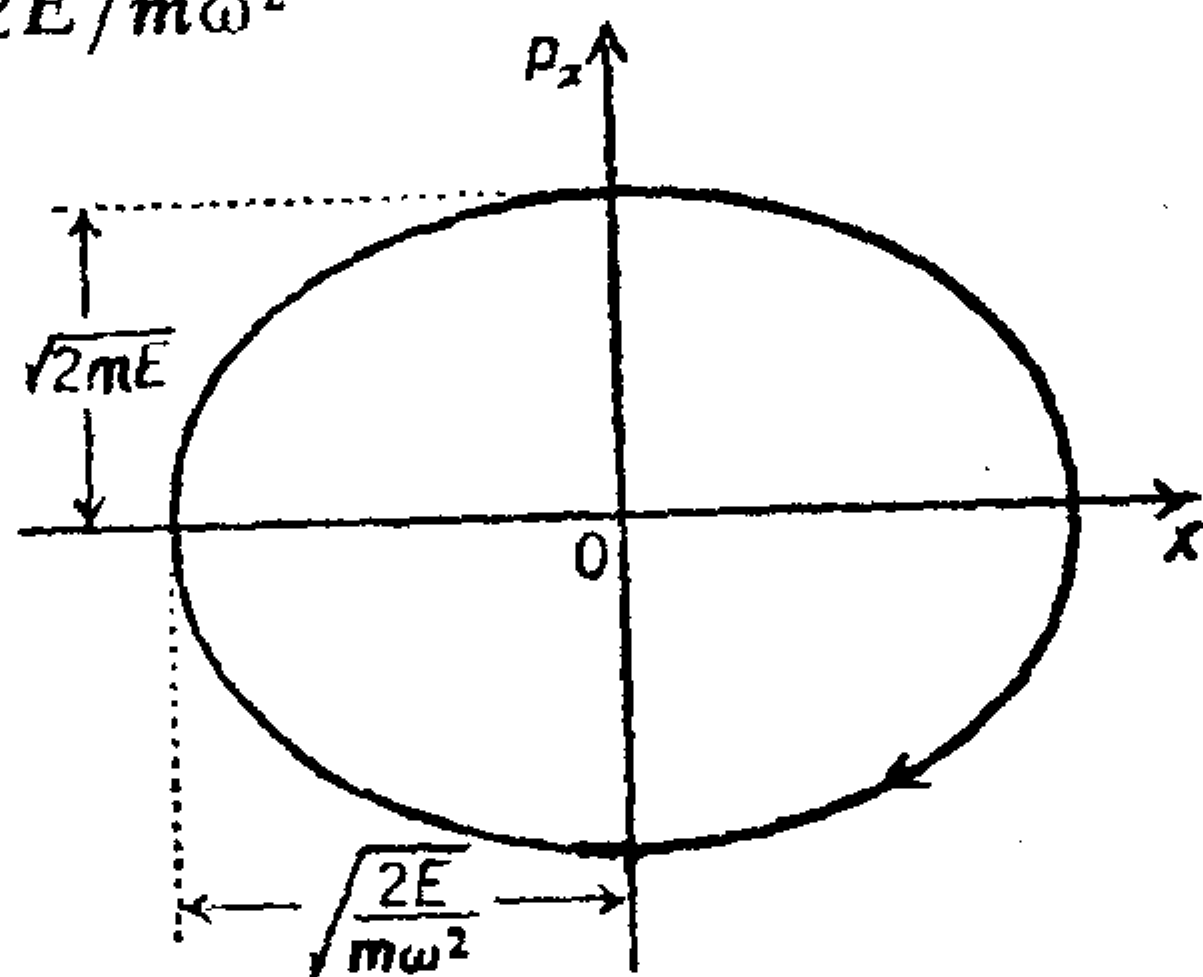


图4-1

在一般的场合下，能实现的运动也可用$2f$维相空间内"曲线"来表示．我们是设想了由该"曲线"稍许任意地偏离的场合．也就是说，不仅考虑q_1，…，q_f的变化δq_1，…，δq_f，而且也考虑p_1，…，p_f的变分δp_1，…，δp_f，设它们是相互独立选取的．然后，让这时$\delta\int Ldt=0$也成立，而将哈密顿原理加以扩展．

由（4.5）可知：

$$L=\sum_i p_i\dot{q}_i-H$$

所以，

$$0=\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\int_{t_1}^{t_2}\delta Ldt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_i(\dot{q}_i\delta p_i+p_i\delta\dot{q}_i)-\delta H\right\}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\dot{q}_i\delta p_i+p_i\delta\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)dt$$

其中（…）内的第二项利用$\delta\dot{q}_i=\frac{d}{dt}\delta q_i$进行分部积分

$$\int_{t_1}^{t_2}p_i\frac{d\delta q_i}{dt}dt=[p_i\delta q_i]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_i\delta q_i\,dt$$

之后，在两端$t=t_1$、$t=t_2$利用$\delta q_i=0$，消去了该式右边的第一项．结果，哈密顿原理成为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left[\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right]dt=0$$

δq_1，…，δp_f，δp_1，…，δp_f是全部独立而任取的微小变化，所以为了使上式成立，必须（…）内全部为零．因此得到：

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,2,\cdots,f)} \tag{4.8}$$

这称为**哈密顿正则方程**.

在H不显含t，能写为$H(q,p)$时，它等于$T+U$(总能量)，这在（4.7）中已表示出来．那么，它的守恒定律怎样才能导出来呢？

这时由于H仅通过q和p与t发生依存关系，故：

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)$$

在这里应用（4.8）时，可看出：

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0$$

也就是说，在哈密顿函数不直接显含时间t时，H不随时间变化．这是在受到洛仑兹力的带电粒子那样场合下也成立的能量守恒定律．H显含时间，是发生在约束条件依赖于t（被约束在移动的面或者线上），利用运动坐标系等情况，所以能量守恒定律不成立也就是当然的事情．

问题2　对一维谐振子，请具体地写出(4.8)是什么形式？

〔下面到本节倒数第二段末尾为止可以略去不看〕

在一维谐振子情况下，由于对象过于单纯，故我们来研究一下磁场内带电粒子的场合．在（4.8）中，有必要注意$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{\Phi}$是x，y，z，t的函数．首先，（4.8）的第一式给出：

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{1}{m}(p_x-eA_x), \quad \text{所以} \quad p_x-eA_x=m\dot{x}$$

第二式给出

$$\frac{d}{dt}p_x=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$=\frac{e}{m}\left[(p_x-eA_x)\frac{\partial A_x}{\partial x}+(p_y-eA_y)\frac{\partial A_y}{\partial x}\right.$$

$$\left.+(p_z-eA_z)\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]-e\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

所以，用$p_x-eA_x=m\dot{x}$时，有：

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}+eA_x)=em\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-e\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

将$A_x(x, y, z, t)$对t微分时，必须考虑x，y，z也为t的函数，故

$$\frac{dA_x}{dx}=\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

结果，与 §2-4最后的计算相同：

$$m\ddot{x}=-e\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+e(\dot{r}\times \mathrm{rot}A)_x$$

y，z分量也同样，所以得到洛仑兹力作用下的运动公式：

$$m\ddot{r}=-e\left(\nabla\Phi+\frac{\partial A}{\partial t}\right)+e(\dot{r}\times \mathrm{rot}A)=e(E+\dot{r}\times B)$$

由这些例子可知，哈密顿正则方程只不过是将运动方程改写而成的．那么，特意将其表示为这种形式，到底有什么优点呢？

§4-3　相空间内的运动

当前，让我们来讨论哈密顿函数不含t的情况．$H(p, q)$给出在$2f$维相空间中的每一点以确定的值．现在，设$t=0$时质点组的全部质点位置与动量作为初始条件，这就是选取在相空间某处的一点．这样，不仅该点H值——等于能量值——而且$\partial H/\partial p_i$和$\partial H/\partial q_i$的值也确定了，所以，根据（4.8）式，在其

课间小憩

正则方程名称的由来

被拉格朗日分析力学的壮丽成就所感动的哈密顿（William Rowan Hamilton，1805—1865）努力在光学当中去创立同样的体系。随后，他注意到在非均匀媒质中，光线的路径与受力运动的粒子轨道之间的类似性。他发现了以拉格朗日函数为被积函数的新形式的变分原理（哈密顿原理），进而导入了哈密顿函数，导出了正则方程。雅可比（Karl G.J.Jacobi 1804—1851）摒弃了哈密顿理论中不必要的杂乱部分，舍去了多余的限制，将其进行一般化，导出了哈密顿-雅可比方程。

正则方程是由Canonical equation 译过来的，Canonical这个名字据说是雅可比起的。Canonical有"合乎宗教的规章"、"包含在圣书正典中的"、"正统的"、"标准的"等等意思，是由canon(正式的教典)制造出来的形容词。

在统计力学当中亦使用canonical ensemble这个词，数学当中也经常使用。在这些当中，神学的气味已经淡薄了，回到了古希腊单纯的"标准的"意义，而成为稍稍看得过分隆重的称呼联系起来。

后的微小时间Δt中q_1，…，q_f，p_1，…，p_f将如何变化就可由

$$\Delta q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\Delta t,\qquad \Delta p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\Delta t \tag{4.9}$$

求出．表示系统状态相空间内的点在Δt之间由该式给出的量在各个方向"运动"．在下一个Δt之间，产生用现在移动位置的q_1…，q_f，p_1，…，p_f计算的Δq_i，Δp_i的移动．这样，逐步做下去的话，就可了解在相空间中表示系统的点（q、p）各瞬间的"运动"．这种场合，其运动在所谓

$$H(q,\ p)=E \tag{4.10}$$

的"超曲面"（在三维空间中，$F(x, y, z)$ = 恒量表示曲面（弯曲的二维空间），（4.10）式表示 $2f$ 维空间内同样的 $2f-1$ 维空间，所以称为超曲面也大概是适当的吧！如果 $f=1$ 就成为曲线）内进行.

用例子来讨论最容易弄懂，所以让我们来考虑一维谐振子（到二维以上时，相空间变到四维以上，连图也无法画，难以处理）.这种场合，哈密顿正则方程为

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{m}p_x, \quad \frac{dp_x}{dt}=-m\omega^2 x$$

（4.10）式给出如图4-1那样的椭圆.

现在，我们取 $x=x_0$，$p_x=0$. 在相空间内，相当于图4-2那样从 x 轴上点P（x_0, 0）出发. 设 $x_0>0$，则 Δt 时间内的移动由

$$(\Delta x)_1=\frac{p_x}{m}\Delta t=0, \quad (\Delta p_x)_1=-m\omega^2 x_0\Delta t<0$$

给出，所以表示系统的用（x, p_x）表示的点从P移动到下方.

下一个 Δt 之间移动为

$$(\Delta x)_2=\frac{1}{m}(-m\omega^2 x_0\Delta t)\Delta t=-\omega^2 x_0(\Delta t)^2$$

$$(\Delta p_x)_2=-m\omega^2\{x_0+(\Delta x)_1\}\Delta t=-m\omega^2 x_0\Delta t$$

表示在同样稍稍向下行进的同时，x 减小了极小的一点，前进路程弯向左下方. 这样顺序地走下去，就能得到沿着图4-2的椭圆顺时针方向绕 $x-p_x$ 空间滴溜滴溜旋转的"运动".

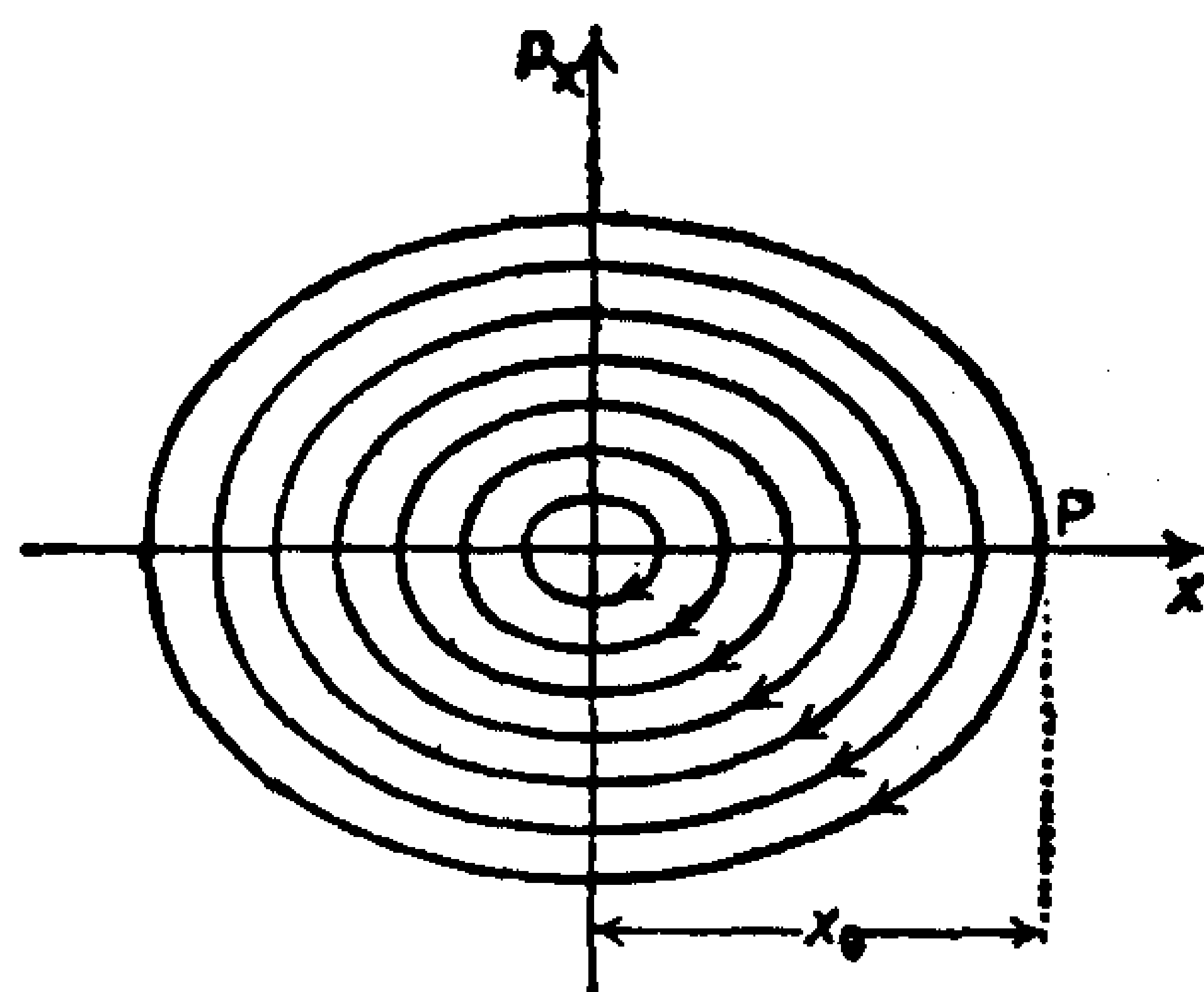


图 4-2

使用计算机做这样的

数值积分时，多数情况下，较上面的做法更精密一些，但考虑方法完全和上面一样．

在$H(q, p, t)$显含t的场合，即使是相空间内的相同点，H和$\partial H/\partial p_i$，$\partial H/\partial q_i$也将因t而异．故即使从同一点出发，也会因何时出发的不同而路径不相同．但是上面的考虑方法是相同的，只不过是要随着移向目的地各个时刻的$\partial H/\partial p_i$，$\partial H/\partial q_i$来确定下一步前进的道路．因此，若出发时刻与出发点（初始条件）决定了的话，以后的运动就没有选择的余地而单值地确定．

正如以后将会了解的那样，除去特异点之外，在同一时刻通过相空间内一点的二条以上运动路径应当是不存在的．好象仅由q_1，q_2，…，q_f形成的f维空间——将其称为**位形空间**（对一个质点用笛卡儿坐标时，与普通空间相同）——那样，通过其中各点各种各样的运动都是可能的，但没有轨道交叉情况．如果是一维谐振子，相空间是由无数充满着的同心椭圆——顺时针——构成的，它们互不相交．

在这样的意义下，使用哈密顿算符和相空间来讨论时，易于把握运动的性质．这是与变数的数目由q_1，…，q_f这f个加倍到包含p_1，…，p_f这$2f$个，但是方程变成了关于时间的一阶微分方程这一点有关的．牛顿和拉格朗日方程是用关于t的二阶导数来表示的，所以在初始条件当中需要位置和速度这两个量．为此，如在抛物运动中，考虑从同一点投掷物体的时候，由于给出初速度的方法不同而可能有五花八门的运动．然而，用相空间哈密顿的做法，则仅由出发点的“位置”——但是是$2f$维空间的“位置”——就完全可以确定“运动”．由于初速度的不同，“位置”是不同的．

正则方程式（4.8）能看成是在$2f$维相空间内各点给出到达该处的系统的状态点的“速度”（$\dot{q}_i$，$\dot{p}_i$），所以，与流体内各点由流速所定义的“流速场”极为相似（但维数不是三维）．给定

质点组的初始条件而使之运动，所谓研究其运动，就相当于着眼于这个“流速场”中的一点，来观察处于该处的流体随着流动如何地移动．这样考虑方法的优点在下节所述统计力学的对象中得到了充分地发挥．

§4-4　刘维定理

作为例子，让我们来考虑气体分子．如果是单原子分子，则可将它看为质点，只要观察位置x，y，z随时间的变化就可以了．所以，自由度$f=3$，相空间是x，y，z，p_x，p_y，p_z构成的六维空间．若为双原子分子，需要了解重心的位置X，Y,Z，原子间距离R，表示分子轴方向角度θ，ϕ这六个量随时间的变化，故自由度$f=6$，相空间是它们和p_X，p_Y，p_Z，p_R，p_θ,p_ϕ所构成的12维空间．总而言之，考虑这样表示一个分子状态的相空间——将其称为**μ空间**——时，各个分子的运动状态可用其中一点来代表．

气体是由许多分子（设为N个）构成的，所以将各个分子用μ空间的点来表示时，N个代表点遵循正则方程构成了流过μ空间内的抽象的“流体”．

作为最简单的场合，让我们来考察单原子分子气体进入长方体容器内的情形．假定器壁是完全的平面（从原子论的观点看这是不可能的，大致这样来考虑），分子与它碰撞时为弹性碰撞，和光从平面上的反射一样形式地折回．如果除了器壁的反射之外，没有外力作用在分子上，分子彼此之间也没有碰撞时，各个分子则如图4-3那样运动，这是将x，y，z三个方向的匀速往返运动组合而成的运动．

当仅仅着眼于x方向的运动，取出相空间中x与p_x的部分来看时，分子运动表现为图4-4的$P\to Q\to R\to S\to P\to\cdots$那样的“运动”．

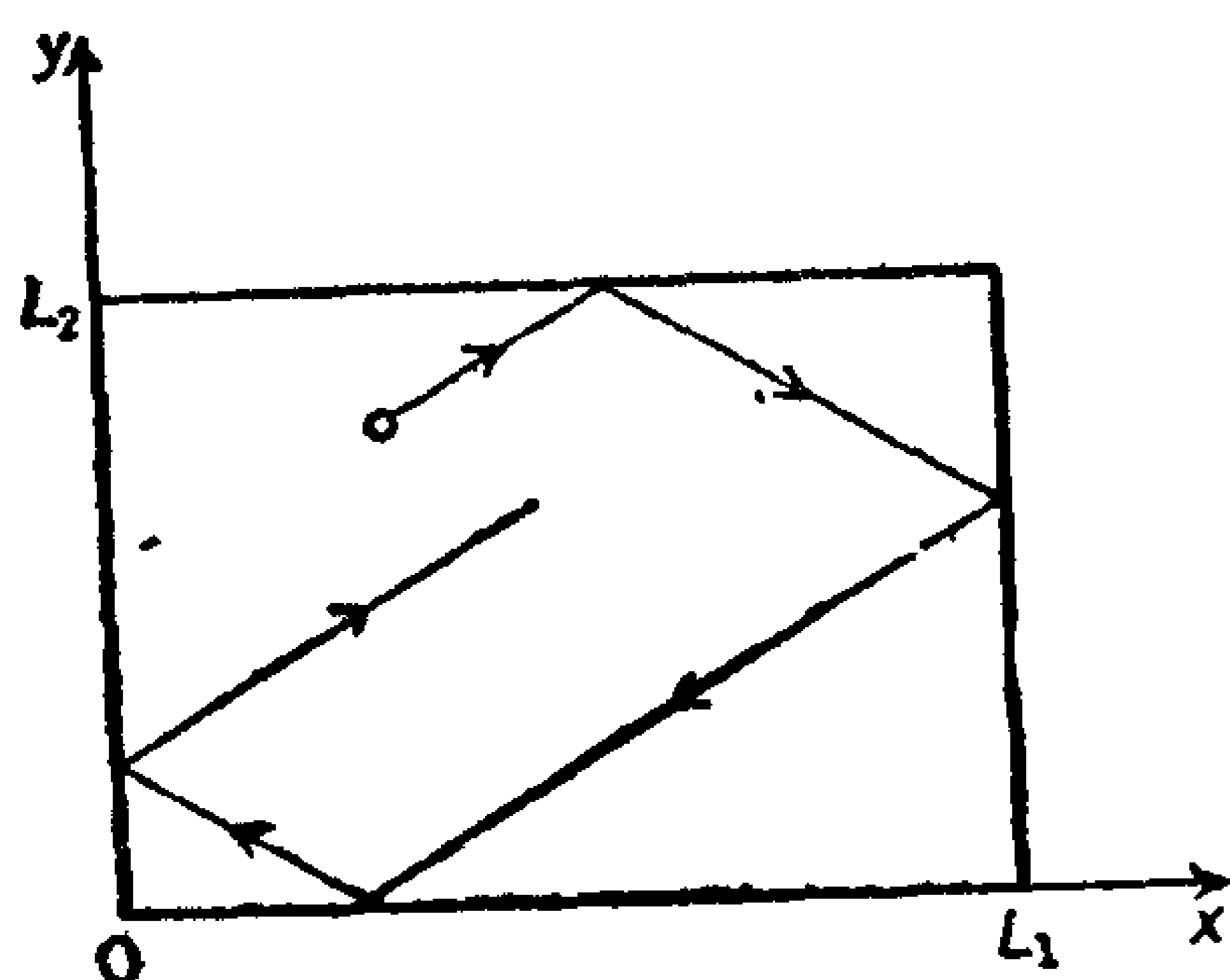


图 4-3

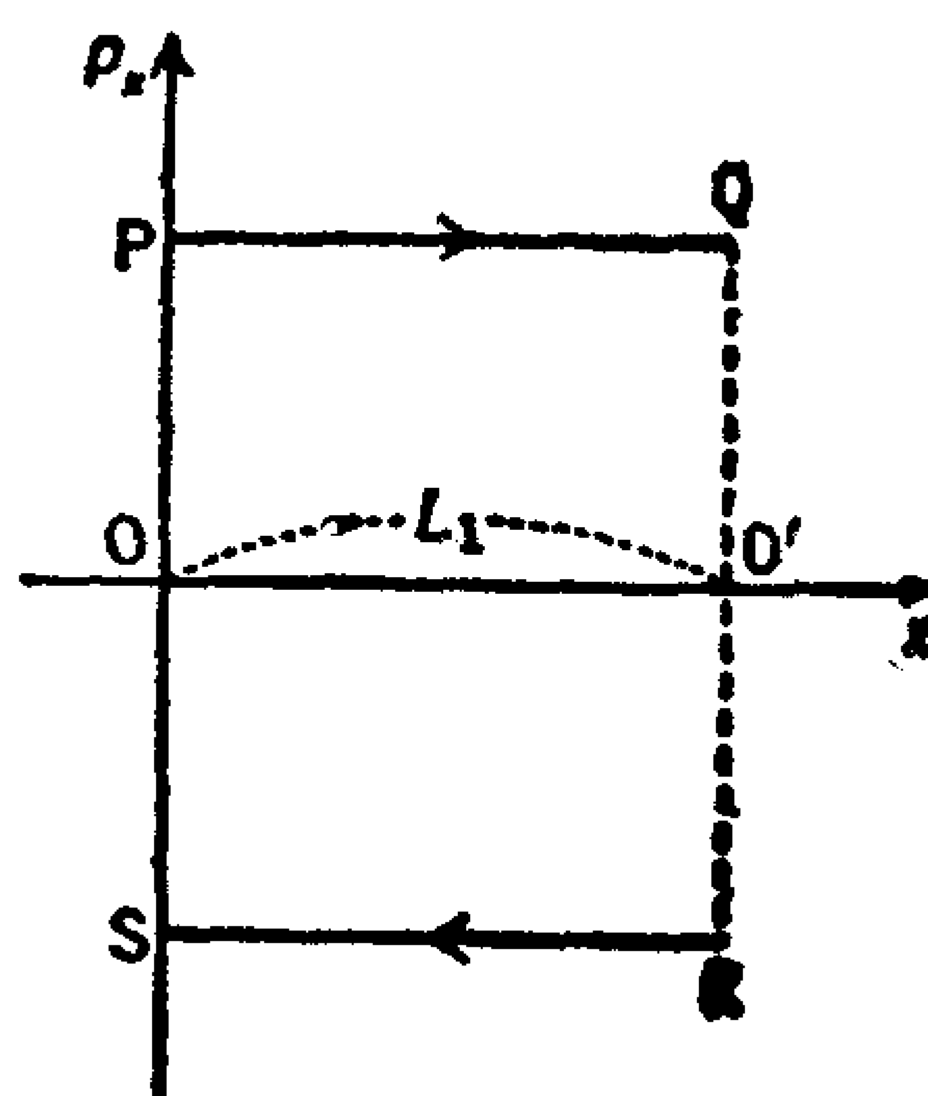


图 4-4

由于很多分子各自都进行这样的运动，在μ空间中将分布着这样许多的折线．因为实际上分子要互相碰撞，速度将发生改变，所以单个分子并非任何时候都持续一条折线的运动．但是，在大量分子碰撞而处于热平衡状态的气体中，即使各个分子的"运动"变化，μ空间内折线的分布却可以认为是稳定的．可以说"在这种情况下就是处于热平衡状态"．这样，表示热平衡状态的气体的N个代表点，在μ空间内(平均而言)形成了一个稳定的流动．

如果是多原子分子或者容器形状更加不同，那么，流动的样子大概会变得更为复杂．但热平衡状态的气体同样可用μ空间内的"稳定流"表示．

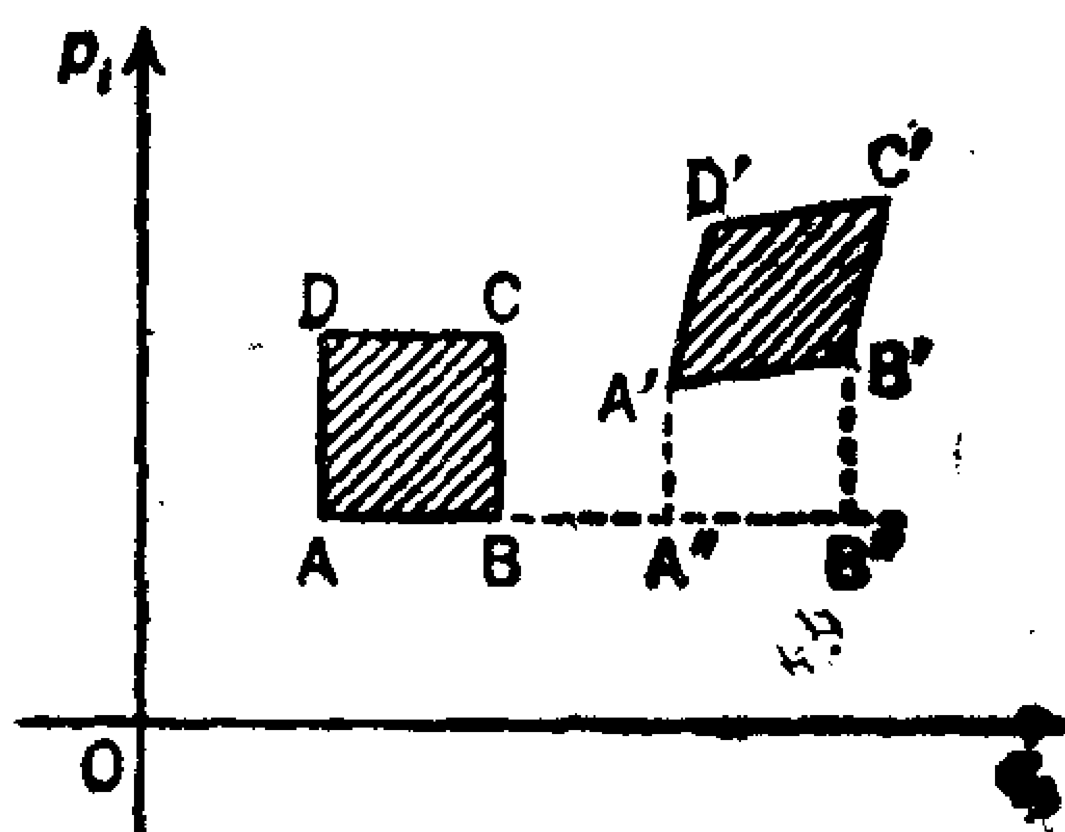


图 4-5

现在来研究这样的流动如图4-5中的ABCD那样的体积元．图4-5仅画出了第i个自由度的部分，对于其它自由度也可同样地选取．在极短的时间Δt后，它移动至A′B′C′D′．设A点的"位置"为(q_i，

p_i),AA′ 的水平距离 AA″根据（4.9）为

$$\mathrm{AA}'' = (\Delta q_i)_{q_i} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{q_i} \Delta t$$

设AB＝dq_i，BB′ 的水平距离BB″为

$$\mathrm{BB}'' = (\Delta q)_{q_i+\Delta q_i} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{q_i+dq_i} \Delta t$$

$$= \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{q_i} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) dq_i\right] \Delta t$$

因此，在Δt之间所产生水平方向的伸长为

$$\mathrm{BB}'' - \mathrm{AA}'' = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} dq_i \cdot \Delta t$$

用原来的长度dq_i来除它，则q_i方向的伸长比率由

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \Delta t$$

给出.

在上下方向（p_i方向）同样这样做时，容易导出上下方向伸长的比率，由

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \Delta t$$

给出. 如果Δt极短的话，可以认为A′B′与q_i轴形成的角度和A′D′与p_i轴间所或的角度也都极小，所以若忽略高级无穷小量（$\cos\delta$与1的差等）时，可以看出：

$$(\mathrm{A'B'C'D'}\text{的面积}) = \left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \Delta t\right) dq_i \times \left(1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \Delta t\right) dp_i$$

$$= dq_i \cdot dp_i = (\mathrm{ABCD}\text{的面积})$$

在相空间内取有限的体积，其中的各点在有限的时间中进行的运动也是将这样的微小部份的集合所进行的运动对时间积分而得到的，所以：

在所考虑的相空间有限区域内的各点按照正则方程进行运动时，该区域的形状变化，但体积保持不变．

这个定理成立．将其称为**刘维定理**．刘维定理是构成统计力学重要基础的定理．

问题 3 试对图4-4的运动场合证明刘维定理．这时，怎样处理两端QRSP好呢？

§4-5 泊松括号

一般，将用坐标(位置)、动量和时间的函数所表示的量称为**力学变数**．动能T，角动量$L=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$等都是力学变数．现在，设这样的力学变数之一为$F$，随着运动$F$随时间而变化，所以来考虑$F(t)$随时间变化率时有：

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\dot{p}_i\right)$$

在这里应用正则方程（4.8）时，可变形为

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

这式右边第二项是具有特征的形式．因此，来考虑一般的对于两个力学变数$u(q,p,t)$，$v(q,p,t)$时，由

$$[u,v]\equiv\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)\tag{4.11}$$

所定义的式子，将其命名为**泊松括号**．

用这个记号，上式成为

$$\boxed{\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+[F,\ H]} \qquad (4.12)$$

特别在F不显含t，而以$F(q,\ p)$的形式来定义时，有：

$$\boxed{\frac{dF}{dt}=[F,\ H]}$$

如果$[F,\ H]=0$，可知力学变数不随时间变化而取恒定值.

例如考虑在有心力场中运动质点的角动量．通过

$$\frac{dl_x}{dt}=\frac{\partial l_x}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x}-\frac{\partial l_x}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial l_x}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y}-\frac{\partial l_x}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial l_x}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z}-\frac{\partial l_x}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z}$$

计算l_x随时间的变化.

由于$l_x=yp_z-zp_y$，故：

$$\frac{\partial l_x}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial l_x}{\partial y}=p_z,\quad \frac{\partial l_x}{\partial z}=-p_y$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial p_x}=0,\quad \frac{\partial l_x}{\partial p_y}=-z,\quad \frac{\partial l_x}{\partial p_z}=y$$

此外，由于$H=(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/2m+U(r)$，故能得到：

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{dU}{dr},\quad \frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}$$

y，z分量也相同.

将它们代入后可知：

$$[l_x,\ H]=\frac{1}{m}(p_zp_y-p_yp_z)+(zy-yz)\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}=0$$

所以

$$\frac{dl_x}{dt}=0 \quad \text{其他分量也相同}$$

因此可知，l为守恒量.

特别当取H来作为F时，有：

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+[H,\ H]=\frac{\partial H}{\partial t}$$

所以，在H不显含t的$H(q,\ p)$形式下，$\partial H/\partial t=0$，故可知H也为守恒量．

问题 4 证明泊松括号具有以下性质：

$$[u,\ p_i]=\frac{\partial u}{\partial q_i},\ [u,\ q_i]=-\frac{\partial u}{\partial p_i}$$

$$[q_i,\ q_j]=0,\ [p_i,\ p_j]=0,\ [p_i,\ q_j]=\delta_{ij}$$

现在来考虑将广义坐标从q_1，q_2，…，q_f改为q'_1，q'_2，…，q'_f的场合．这个变换由

$$q'_i=q'_i(q_1,q_2,\cdots,q_f,t)\quad (i=1,2,\cdots,f)\quad (4.13a)$$

或者其逆变换

$$q_i=q_i(q'_1,\ q'_2,\ \cdots,q'_f,t)\ (i=1,2,\cdots,f)\qquad (4.13b)$$

给出．将这样的变换叫做**点变换**．若作成上式对t的微分，则有：

$$\dot{q}'_i=\dot{q}'_i(q_1,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_f,t)=\sum_j\frac{\partial q'_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial q'_i}{\partial t}\quad (4.14a)$$

反过来：

$$\dot{q}_i=\dot{q}_i(q'_1,\cdots,q'_f,\dot{q}'_1,\cdots,\dot{q}'_f,t)=\sum_i\frac{\partial q_i}{\partial q'_j}\dot{q}'_j+\frac{\partial q_i}{\partial t}\qquad (4.14b)$$

通过这样的点变换，拉格朗日函数L也从$L(q,\ \dot{q},\ t)$变为$L'(q',\ \dot{q}',\ t)$．在新的广义坐标q'_i下，共轭动量p'_i由

$$p'_i=\frac{\partial L'_i}{\partial \dot{q}'_i}$$

来定义．

可是，所谓L'是在$L(q,\ \dot{q},\ t)$的q，$\dot{q}$中代入(4.13b)、(4.14b)而得的，故：

$$p'_i=\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i}=\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_i}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i}=\sum_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_i}p_j$$

此外，（4.14a）的$\dot{q}'_i$为$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_f$的一次式；（4.14b）的$\dot{q}_i$为$\dot{q}'_1$，…，$\dot{q}'_f$的一次式（在不显含t时为一次齐次式），所以$\partial\dot{q}_j/\partial\dot{q}'_i=\partial q_j/\partial q'_i$（这是（1.28）式的一般化）是$q'_1$，…，$q'_f$，$t$的函数，不包含$\dot{q}'$．因此，代替（$q'$，$\dot{q}'$），以（$q$，$p$）来表示它时，也不包含$p$．因此能求出：

$$\frac{\partial p'_i}{\partial p_j}=\frac{\partial q_j}{\partial q'_i}\left(\text{同样}\frac{\partial p_i}{\partial p'_j}=\frac{\partial q'_j}{\partial q_i}\right) \tag{4.15}$$

现在，设两个力学变数为u、v，将它们用（q，p，t）表示时，单纯记为u、v，用（q'，p'，t）表示时写为u'、v'，则：

$$[u',\ v']=\sum_i\left(\frac{\partial u'}{\partial q'_i}\frac{\partial v'}{\partial p'_i}-\frac{\partial u'}{\partial p'_i}\frac{\partial v'}{\partial q'_i}\right)$$

因为u'和v'也可以看作是将u（q，p，t）与v（q，p，t）的q和p作为q'和p'的函数表示出来（$q_i=q_i$（q'，t），$p_i=p_i(q'$，p'，t)），故能改写为

$$\frac{\partial u'}{\partial q'_i}=\sum_j\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q'_i}+\sum_j\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q'_i}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial p'_i}=\sum_k\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial p'_i}$$

第二式用（4.15）时，可变形为

$$\sum_i\frac{\partial u'}{\partial q'_i}\frac{\partial v'}{\partial p'_i}=\sum_i\sum_j\sum_k\left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q'_i}\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial p'_i}+\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q'_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial p'_i}\right)$$

$$=\sum_i\sum_j\sum_k\left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q'_i}\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}+\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial q'_i}\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}\right)$$

$$=\sum_j \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}+\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right)$$

q_1，q_2，…，q_f，p_1，p_2，…p_f 这 $2f$ 个可以看做相互独立的变数，所以

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k}=\delta_{jk},\quad \frac{\partial p_j}{\partial q_k}=0$$

因此可知：

$$\sum_i \frac{\partial u'}{\partial q_i'}\frac{\partial v'}{\partial p_i'}=\sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j}$$

同样也完全能证明：

$$\sum_i \frac{\partial u'}{\partial p_i'}\frac{\partial v'}{\partial q_i'}=\sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j}$$

所以结果有：

$$[u',\ v']=[u,\ v] \tag{4.16}$$

即表明：泊松括号关于点变换不变.

§4-6 简谐振子的相空间

在上一节讨论了由广义坐标（q_1，q_2，…，q_f）向（q'_1，q'_2，…，q'_f）的点变换，并已知道，泊松括号保持不变：

$$[u,\ v]=[u',\ v']$$

这时，哈密顿正则方程也由原来的

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

变换为

$$\frac{dq_i'}{dt}=\frac{\partial H'}{\partial p_i'},\quad \frac{dp_i'}{dt}=-\frac{\partial H'}{\partial q_i'}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

除了加上撇“′”之外，从形式上看与原来完全相同.

在哈密顿学派的考虑中，使用的是$2f$维的相空间．其优点已如上述．然而，上述所谓的点变换是仅将$2f$维当中的$q_1, q_2, \cdots, q_f$的部分变换为其它的$q_1', q_2' \cdots, q_f'$，动量的部分只不过是与其相关地变化．不用说，除了$q \to q'$之外，$p \to p'$不能随意地进行．要是那样的话，就不能保持正则方程不变（也不能保持泊松括号不变），变换后的q'，p'代表什么样的物理意义就完全说不清了．

那么，"保持正则方程的形式不变"——与说"使泊松括号保持不变"指的是同一件事（本书中略去了有关这一点的证明）——是否就不能考虑较点变换稍稍自由的变换（p和q可以混在一起）呢？在展开一般性的讨论之前，让我们来看看具体的例子．为此，讨论一维谐振子比较合适．一维谐振子的哈密顿算符由

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + m^2 \omega^2 x^2 \right)$$

给出，在相空间内，$H = E$形成一个椭圆．由于椭圆难于讨论，将其变为圆似乎更好一些．尽管如此，单设$m\omega x = q$是不行的，必须与$x \to q$相对应，p_x也必须改变．因此，首先令：

$$q = \gamma x$$

将拉格朗日函数改写为

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

设：

$$= \frac{m}{2\gamma^2}\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 \right)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m}{\gamma^2}\dot{q} \quad \therefore \quad \dot{q} = \frac{\gamma^2}{m} p$$

然后，用同样的处理方法作成哈密顿算符：

$$H = p\dot{q} - L = p\frac{\gamma^2}{m}p - \frac{m}{2\gamma^2}\left(\frac{\gamma^2}{m}p\right)^2 + \frac{m}{2\gamma^2}\omega^2 q^2$$

$$= \frac{\gamma^2}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2}q^2$$

这样，为了在pq面（新的相空间）上形成圆，就必须：

$$\frac{\gamma^2}{2m}=\frac{m\omega^2}{2\gamma^2}$$

因此可知，若取

$$\gamma=\sqrt{m\omega}$$

即可达到目的．也就是说，由（x, p_x）向（q, p）进行

$$q=\sqrt{m\omega}\ x,\quad p=\sqrt{\frac{m}{\omega}}\ \dot{x}=\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p_x$$

的变换就行．变换得的哈密顿函数为

$$H=\frac{\omega}{2}(p^2+q^2) \tag{4.17a}$$

正则方程是

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\omega p,\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\omega q \tag{4.17b}$$

若根据$q=\sqrt{m\omega}x$，$p=p_x/\sqrt{m\omega}$再回到x，p_x的话，有：

$$\dot{x}=\frac{1}{m}p_x,\quad \dot{p}_x=-m\omega^2 x$$

所以，确实与原来的方程相同．

这样一来，"运动"变成相空间中的圆．若是能量为E的运动，则其半径为$\sqrt{2E/\omega}$．接着，让我们象图4-6那样来取p轴，q轴．于是，"运动"变成了逆时针旋转，在下面的讨论中比较方便．

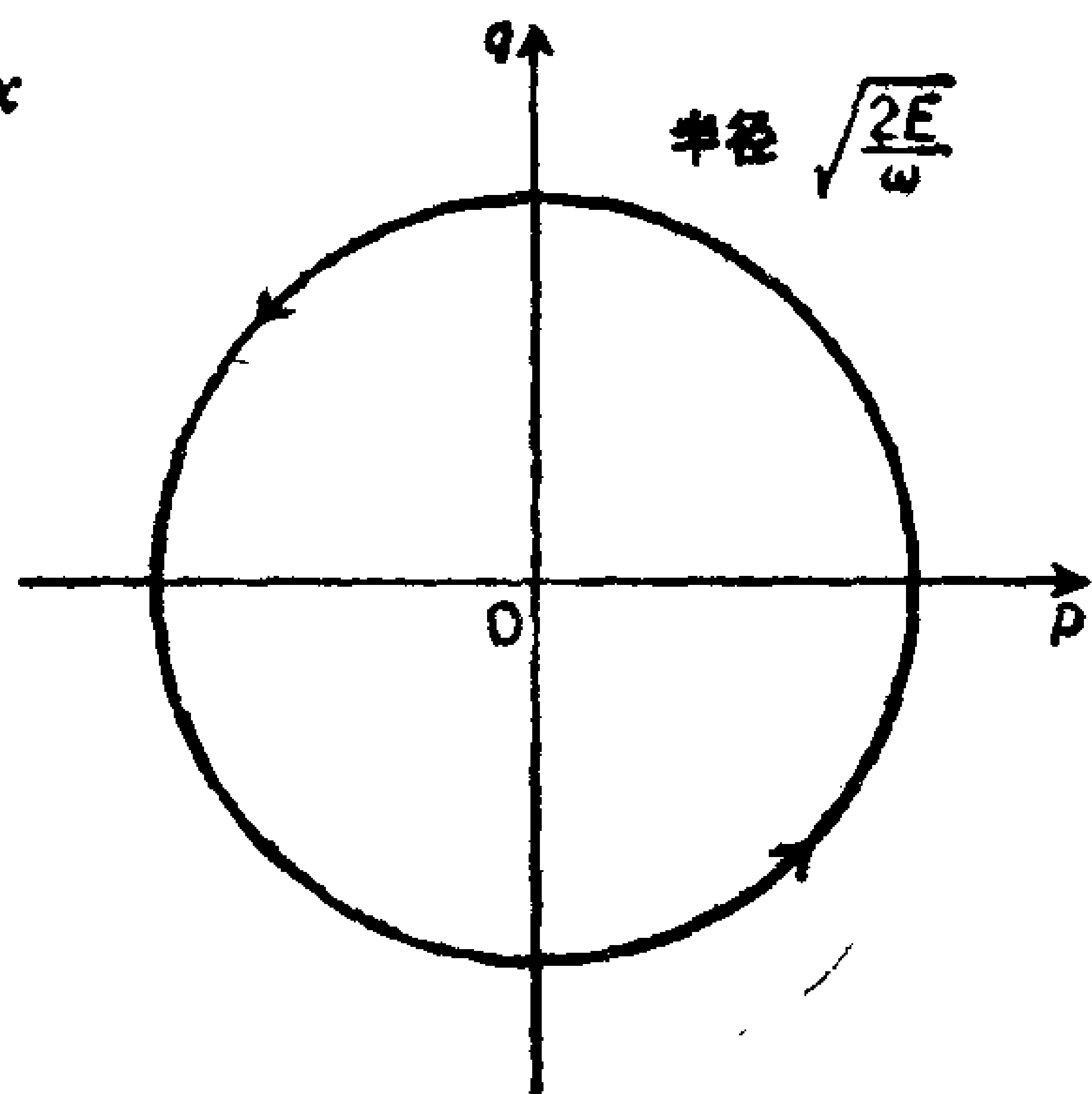


图4-6

由$\dot{q}=\omega p$，$\dot{p}=-\omega q$马上可知，"运动"是角速度为ω的匀速圆周运动．如果这样的话，在该pq空间中取平面极坐标又将如何呢？为此，让我们假定

$$p' = \sqrt{p^2+q^2}, \quad Q = \mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{p}$$

试试看．这样一来，能量可表为

$$\mathscr{H}' = \frac{\omega}{2}P'^2$$

但由此作成：

$$\frac{\partial \mathscr{H}'}{\partial P'} = \omega P', \quad -\frac{\partial \mathscr{H}'}{\partial Q} = 0$$

令它们等于$\dot{Q}$，$\dot{P}'$时，变成了

$$\dot{Q} = \omega \dot{p}', \quad \dot{P}' = 0$$

这是不正确的．应当是$\dot{Q}=\omega$．实际上，根据上面的定义能 得到：

$$\dot{Q} = \frac{\dot{q}p - q\dot{p}}{p^2+q^2}$$

所以，将上述的结果$\dot{q}=\omega p$，$\dot{p}=-\omega q$代入这里，确实有 $\dot{Q}=\omega$．因此，即使象上面这样选择Q是可以的，但对它象P'那样随意地取共轭动量则是错误的．

因而，让我们以$\dot{Q}=\omega$为前提，来看看怎样决定 P 和哈密 顿算符以使得正则方程成立．(4.8) 的第一式为

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} = \omega$$

所以设$\mathscr{H}=\omega P$的话即可．第二式为

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q}$$

所以代入$\mathscr{H}=\omega P$时，$\dot{P}=0$，因此成为P等于恒量，与能量守恒定律不矛盾．那么，我们弄清了：

$$Q = \mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{p}, \quad P = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$$

$$\mathscr{H} = \omega P \tag{4.18}$$

是新的变数和用它的哈密顿函数．

在这个Q和 P 作成的相空间中，振子的运动用平行于Q轴的“匀速运动”来表示（图4-7）．能量不同时，离Q轴的距离改变．相空间内速度ω不是能量的函数，而是共通的．将Q、P用原来x、p_x写的话，成为

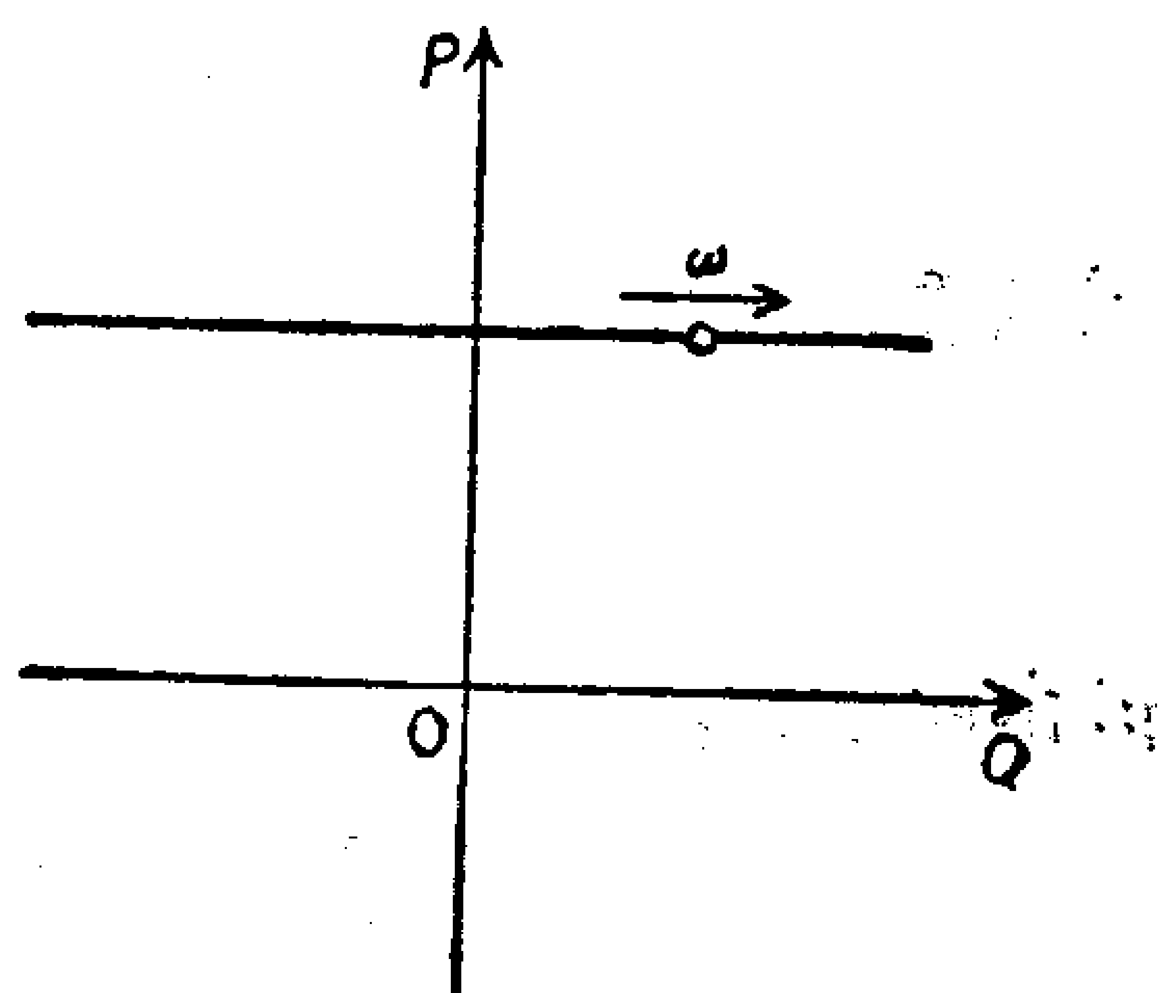


图 4-7

$$Q=\mathrm{tg}^{-1}\frac{m\omega x}{p_x},$$

$$P=\frac{1}{2m\omega}(p_x^2+m^2\omega^2x^2) \tag{4.19}$$

这样，位置与动量混在一起时，哪个是位置，哪个是动量区别已经变得没有意义了．

问题5 代替(4.18)，若设$\mathrm{tg}^{-1}(q/p)$为P，Q和$\mathscr{H}$将如何？

作用变量和角变量

让我们再稍微考虑一下(4.18)、(4.19)给出的新广义动量p的意义．一维谐振子的运动用图4-2的一个椭圆来表示，我们来求出这个椭圆所包围的面积．将运动的一个周期（转一次）中的积分用$\oint$来表示时，它可用

$$\oint p_x dx$$

来计算，设$x=A\sin(\omega t+\alpha)$时，

$$dx=A\omega\cos(\omega t+\alpha)dt$$

$$p_x=mA\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

所以

$$\oint p_x dx=\int_0^{2\pi/\omega} mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\alpha)dt=m\omega\pi A^2$$

与能量

$$E=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

已设时，有：

$$\oint p_x dx=\frac{2\pi}{\omega}E$$

将表示周期性运动的广义坐标q_i和与其共轭的动量p_i构成

$$J_i=\frac{1}{2\pi}\oint p_i\,dq_i$$

这个量称为**作用变量**

现在的情况

$$J_x=\frac{1}{2\pi}\oint p_x dx=\frac{1}{\omega}E$$

是这个谐振子的作用变量．从（4.19）第二式可以看出，我们的P只不过是这个作用变量而已．

q_i无论是什么样的量，作用变数J_i必然具有（能量）×（时间）的量纲．这与作用（3.13）和角动量有相同的量纲．这样，将其视为广义动量时，与其共轭的广义坐标就具有角度的量纲．因此，将这样的广义坐标叫做**角变量**，多半用ω_i表示．的确如此，由（4.18）或（4.19）的第一式定义的Q是连接图4-6动点与原点的直线和p轴形成的角．

作用变量、角变量也适用于更一般的周期运动，运用于天文学中讨论天体运动的周期等方面，本世纪初建立初期量子论时，与导入量子化条件相关联，对其进行了详细的研究．本书并不深入进行一般性讨论，仅停留在介绍名称的程度．

§4-7　正则变换　I

在上节当中，就一维谐振子的情况，作为坐标和动量在一起的相空间中变量变换的实例进行了讨论．其结果，哈密顿函数变得不包含坐标Q，并由$\dot{P}=\ \partial\mathscr{H}/\partial Q=0$导出“$P$为恒量”这个结果．也就是说，Q成为循环坐标，与其共轭的广义动量P变成常数．

这也可以说是对谐振动进行变换，使之变为一种匀速运动．进一步变换的话，使其速度变为零——静止——也是可能的．前节那样的做法有些漫无计划，所以在本节中，我们来叙述这种变换的一般性理论．

当给出表示自由度f系统的广义坐标q_1，q_2，…，q_f和与其共轭的广义动量p_1，p_2，…，p_f时，它们与t的函数的$2f$个变数

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_1(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t) \\
Q_f &= Q_f(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_1 &= P_1(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_f &= P_f(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f, t)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

关于被变换的哈密顿函数$\mathscr{H}(Q_1, \cdots, Q_f, P_1, \cdots, P_f, t)$满足与原来相同形式的正则方程

$$\frac{dQ_i}{dt}=\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P}, \quad \frac{dP_i}{dt}=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_i} \tag{4.21}$$

时，将这个$(q, p) \to (Q, P)$的变数变换称之为**正则变换**．点变换也是正则变换的特殊情况．

在4-2节中讲过，正则方程是由扩张了的哈密顿原理导出来的．因此，(Q, p)为了满足(4.21)，只要使它们同样地满足哈密顿原理就行．也就是说，若有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_i P_i Q_i - \mathscr{H}(Q,P,t)\right\}dt = 0$$

的话就可以了．为此，不用说，将(4.20)代入$\sum P_i \dot{Q}_i - \mathscr{H}(Q, P, t)$得到的结果等于$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$即可满足．

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathscr{H}(Q,P,t) + \frac{dW}{dt} \tag{4.22}$$

也可以．其中，W为一阶连续可微的$Q_1, \cdots, Q_f, P_1, \cdots, P_f, t$的任意函数．其原因在于，$W(Q, P, t)$从结果上说仅为$t$的函数，

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt = W\Big(Q(t_2), P(t_2), t_2\Big) - W\Big(Q(t_1), P(t_1), t_1\Big)$$

的值仅由两端t_1和t_2完全决定，与中途经过相空间的什么路径完全无关，所以与变分的平稳性没关系．

（4.22）式包含着q，p，Q，P，t这共计$4f+1$个变数．然而，在它们之间存在着（4.20）表示的$2f$个关系，所以这$4f+1$个中的$2f$个应当能够用剩下的$2f+1$来表示．因而，设将$p_1, \cdots, p_f$，P_1，…，P_f用q_1，…，q_f，Q_1，…，Q_f，t来表示时，全部都成为q，Q，t的函数．因此，W也应当表为$W(q, Q, t)$，所以允许写为

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

将其代入（4.22）时，有：

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left(P_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = H - \mathscr{H} + \frac{\partial W}{\partial t}$$

所以为使（4.22）的恒等式成立的条件为

$$\boxed{p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i}, \quad \mathscr{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}} \qquad (4.23)$$

特别在（4.20）不显含t时，象$W(Q, P)$那样取函数W时，不论将这个Q，P用哪$2f$个变数来表示，也将象$W(q, Q)$那样保持不直接包含t的形式，所以$\partial W / \partial t = 0$，因此有：

$$\mathscr{H} = H \qquad (4.24)$$

哈密顿函数的值保持不变．

试来考虑一维谐振子的例. 根据(4.18),将p, P用q, Q来表示时，可以看出:

$$p=\frac{q}{\operatorname{tg}Q},\qquad P=\frac{q^2}{2\sin^2 Q}$$

不难看出，若取

$$W=\frac{q^2}{2\operatorname{tg}Q}$$

的话，这可由

$$p=\frac{\partial W}{\partial q},\qquad P=-\frac{\partial W}{\partial Q}$$

导出来. 这种场合，由于什么地方都没有包含t，故$\mathscr{H}=H$.

在谐振子的例中，由$p(q, Q)$, $P(q, Q)$的形式求得$W(q, Q)$，多半是将这个手续倒过来，给出W的形式，再根据(4.23)来确定p, P. 这种场合，由于给定$W(q, Q, t)$时，由它就确定了变换，所以将这个函数$W(q, Q, t)$称为变换的**母函数**.

问题6　由母函数$W=m\omega qQ$确定的正则变换是什么样的？其中:

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

§4-8　正则变换 II

在上节中，考察了将q, p, Q, P都用q, $Q(t)$表示，母函数也设为$W(q, Q, t)$的情况. 让我们考虑这种表达方式以外的情况.

首先来考虑用q, $P(t)$将会怎样？在(4.22)中，由于q与Q是打点·的，所以，必须将其变为$\dot{q}_i$和$\dot{P}_i$. 这可以利用

$$P_i\dot{Q}_i=\frac{d}{dt}(P_iQ_i)-Q_i\dot{P}_i$$

将（4.22）改写为

$$
\sum p_i\dot{q}_i - H(q,\ p,\ t) = -\sum_i Q_i\dot{P}_i - \mathscr{H}(Q,p,t)+\frac{d}{dt}\left(W+\sum_i P_iQ_i\right)
$$

将 $W' = W+\sum_i P_iQ_i$

看作是用q，$P(t)$的函数表示的，代入表示为

$$
\frac{dW'}{dt} = \sum\left(\frac{\partial W'}{\partial q_i}\dot{q}+\frac{\partial W'}{\partial P_i}\dot{P}_i\right)+\frac{\partial W'}{\partial t}
$$

的式中，整理得：

$$
\sum_i\left(p_i - \frac{\partial W'}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i+\sum_i\left(Q_i + \frac{\partial W'}{\partial P_i}\right)\dot{P}_i = H - \mathscr{H}+\frac{\partial W'}{\partial t}
$$

由此得：

$$
\boxed{p_i = \frac{\partial W'}{\partial q_i},\ Q_i = -\frac{\partial W'}{\partial P_i},\ \mathscr{H} = H+\frac{\partial W'}{\partial t}} \qquad (4.25)
$$

W是任意的，所以W'也是任意的．附加$\sum P_iQ_i$没有必要当成问题．

用p，$Q(t)$时，可以按照同样的办法，而设

$$
W'' = W+\sum p_iq_i
$$

结果由

$$
\boxed{q_i = -\frac{\partial W''}{\partial p_i},\ P_i = -\frac{\partial W''}{\partial Q_i},\ \mathscr{H} = H+\frac{\partial W''}{\partial t}} \qquad (4.26)
$$

给出．

用p，$P(t)$表示时，可设：

$$
W''' = W+\sum_i(p_iq_i+P_iQ_i)
$$

q_i，Q_i用

$$q_i = -\frac{\partial W'''}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W'''}{\partial p_i}, \quad \mathscr{H} = H + \frac{\partial W'''}{\partial t} \tag{4.27}$$

来计算.

让我们来看几个例子。

恒等变换

$$W' = \sum P_i q_i$$

根据（4.25）

$$p_i = P_i, \quad Q_i = q_i \tag{4.28}$$

所以P_i，Q_i与p_i，q_i相同，什么也没有变换——只不过将字母换成大写！这叫**恒等变换**.

从笛卡儿坐标向平面极坐标的点变换：

设 $$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad Q_1 = r, \quad Q_2 = \theta$$

因为

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$p_x = p_r\cos\theta - \frac{1}{r}p_\theta\sin\theta$$

$$p_y = p_r\sin\theta + \frac{1}{r}p_\theta\cos\theta$$

所以： $$q_1 = Q_1\cos Q_2, \quad q_2 = Q_1\sin Q_2$$

$$p_1 = P_1\cos Q_2 - \frac{P_2}{Q_1}\sin Q_2$$

$$p_2 = P_1\sin Q_2 + \frac{P_2}{Q_1}\cos Q_2$$

试着将Q，p用q，P表示时有：

$$Q_1 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad Q_2 = \mathrm{tg}^{-1}\frac{q_2}{q_1}$$

$$p_1 = \frac{P_1 q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{P_2 q_2}{q_1^2 + q_2^2}$$

$$p_2=\frac{P_1 q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}+\frac{P_2 q_1}{q_1^2+q_2^2}$$

故与（4.25）对照可知，这个变换的母函数为

$$W'=P_1\sqrt{q_1{}^2+q_2{}^2}+P_2\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{q_2}{q_1}$$

用原来的记号表示的话，有：

$$W'=p_r\sqrt{x^2+y^2}+p_\theta\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

试着找出通过同样变换将q，P用Q，p表示的方法时，因为有：

$$q_1=Q_1\cos Q_2,\quad q_2=Q_1\sin Q_2$$

$$P_1=p_1\cos Q_2+p_2\sin Q_2$$

$$P_2=-p_1Q_1\sin Q_2+p_2Q_1\cos Q_2$$

故参照（4.26）得：

$$W''=-p_1Q_1\cos Q_2-p_2Q_1\sin Q_2$$

用普通记号写作：

$$W''=-p_x r\cos\theta-p_y r\sin\theta \tag{4.29}$$

相空间的等角速回转：作为不显含时间t的变换例子，让我们来考虑

$$W=\frac{q^2\cos\omega t-2qQ+Q^2\cos\omega t}{2\sin\omega t} \tag{4.30}$$

这适用于（4.23）的场合.

可直接得到：

由 $p=\dfrac{\partial W}{\partial q}$ 有$Q=-p\sin\omega t+q\cos\omega t$

由 $P=-\dfrac{\partial W}{\partial Q}$ 有 $q=P\sin\omega t+Q\cos\omega t$

将其整理后有：

$$P=p\cos\omega t+q\sin\omega t$$

$$Q=-p\sin\omega t+q\cos\omega t \tag{4.31a}$$

或者

$$p=P\cos\omega t-Q\sin\omega t$$
$$q=P\sin\omega t+Q\cos\omega t \qquad (4.31b)$$

所以明显地看出表示象图4-8那样的关系.

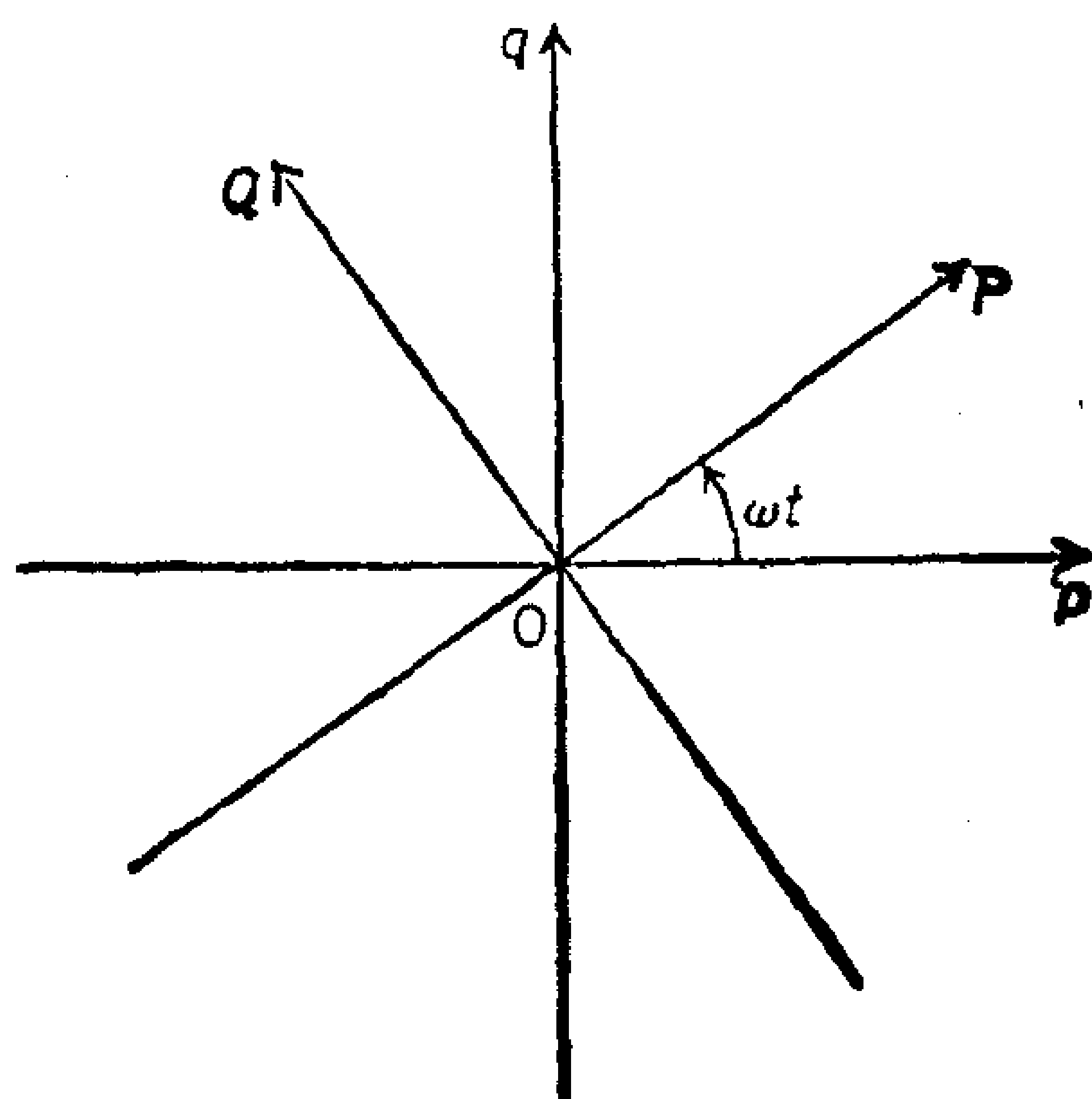


图 4-8

计算$\partial W/\partial t$，将q用P，Q表示时，可整理成：

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{q^2+Q^2-2qQ\cos\omega t}{2\sin^2\omega t}\omega=-\frac{\omega}{2}(P^2+Q^2)$$

所以，变换后的哈密顿函数变为以下形式：

$$\mathscr{H}=H(P,Q)-\frac{\omega}{2}(P^2+Q^2)$$

将此用于改变尺度而表示相空间的圆运动振子的哈密顿函数(4.17a)的场合，即使将p，q改写为P，Q，也是相同的

$$H=\frac{\omega}{2}(p^2+q^2)=\frac{\omega}{2}(P^2+Q^2)$$

形式，所以变成为

$$\mathscr{H}=H+\frac{\partial W}{\partial t}=0$$

因为变换包含t，所以$\mathscr{H}$已不具有能量的意义，这并非不可思议.这样的话，根据正则方程直接可得：

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P}=0, \qquad \frac{dP}{dt}=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q}=0$$

能求出　$Q=$常数，$P=$常数的结果．也就是说，在“回转系” P-Q中，表示振子的点能持续“静止”．

即使求得这样抽象的P和Q也不知道是怎么回事的话，可代入（4.31b），回到q或p，进而，如果有必要的话，可以用

$$x=\frac{q}{\sqrt{m\omega}}, \qquad p_x=\sqrt{m\omega}\,p$$

来改写x和p_x．

§4-9　哈密顿-雅可比方程

将谐振子进行各种各样弯曲回转的结果，在前节最后部分，终于使哈密顿函数成为零．在其它场合，同样情况是不可能的吗？

现在，采取用q和P表示其它量的方式，设母函数为

$$W=W(q_1,\cdots,q_f,P_1,\cdots,P_f,t) \qquad (4.32)$$

因为已经没有必要，所以不写为W'而单记为W．这样，正则变换由（4.25）

$$p_i=\frac{\partial}{\partial q_i}W(q,P,t), \qquad Q_i=\frac{\partial}{\partial q_i}W(q,P,t) \qquad (4.33)$$

给出．由于$\mathscr{H}=H+\partial W/\partial t$，所以作为$\mathscr{H}=0$的条件，可得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}W(q,p,t)=-H(q,p,t) \qquad (4.34)$$

如果这样能求出W的话，正则方程就成为

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_i}=0 \qquad (4.35)$$

所以P_i变为常数．设其为α_i

$$P_i=\alpha_i \tag{4.36}$$

将（4.33）的第一式与（4.36）代入（4.34）时有：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}W(q_1,\cdots,q_f,\alpha_1,\cdots,\alpha_f,t)+H\left(q_1,\cdots,q_f,\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_f},t\right)=0} \tag{4.37}$$

这是W应当满足的方程．称为**哈密顿-雅可比偏微分方程**．将这个方程的解称为**哈密顿主函数**.（4.37）是关于$f+1$个独立变数q_1，…，q_f，t的一阶微分方程，故应当出现$f+1$个积分常数，α_1，…，α_f和W的附加常数与此相当.（4.37）仅含W的一阶导函数，仅此不能定附加常数．这些常数应当根据初始条件等来决定．

因为$\mathscr{H}=0$，不仅P_i，Q_i也恒定．因此我们令：

$$Q_i=\beta_i \tag{4.38}$$

将$P_i=\alpha_i$和$Q_i=\beta_i$代入（4.33）的话，就能求出作为t的函数p_i，q_i的式子：

$$p_i=\frac{\partial}{\partial q_i}W(q_1,\cdots,q_f,\alpha_1,\cdots,\alpha_f,t)$$

$$\beta_i=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}W(q_1,\cdots,q_f,\alpha_1,\cdots,\alpha_f,t) \tag{4.39}$$

从这$2f$个式子就可以解出$2f$个q_1，…，q_f，p_1，…，p_f.

如上可知，在这种做法中，解（4.37），求出哈密顿主函数以代替原封不动地求解牛顿、拉格朗日方程或者哈密顿正则方程，是问题的关键所在．

原来的哈密顿数符H仅用p、q表示，在不直接显含t时，哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_f,\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_f}\right)=0$$

这时试将W分成仅为t函数部分和仅为q函数部分：

$$W=S(q_1,q_2,\cdots,q_f)+\Theta(t) \tag{4.40}$$

将此代入上式时有：

$$\frac{d\Theta}{dt}+H\left(q_1,\cdots,q_f,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_f}\right)=0$$

由于第一项是t而第二项仅是q的函数，所以，为了它恒能成立，这两项必须分别为常数. 令该常数为

$$\frac{d\Theta}{dt}=-E \qquad (\therefore H=E)$$

则

$$\Theta(t)=\text{常数}-Et$$

因而，确定S的式子由

$$H\left(q_1,\cdots,q_f,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_f}\right)=E \tag{4.41}$$

给出. 这也称为**哈密顿-雅可比偏微分方程**. 解它以求S时，得到含f个积分常数的解，除去附加常数，积分常数变为$f-1$个，将其设为α_2，α_3，…，α_f，则有$S(q_1,\cdots,q_f,\alpha_2,\cdots,\alpha_f)$. 这样，$W$为

$$W=S(q_1,\cdots,q_f,\alpha_2,\cdots,\alpha_f)-Et \tag{4.42}$$

现在，由于引进E以代替积分常数α_1，所以可将其看做α_1. 这样一来，(4.39)变为

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}\ (i=1,2,\cdots,f)$$

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial E}-t \tag{4.43}$$

$$\beta_k=\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\ (k=2,3,\cdots,f)$$

这种形式. 由于在S中含有q_1，…，q_f，所以若从这$2f$个式子解出q_1，…，q_f而作为β_1，…，β_f，E，α_2，…，α_f，t函数表示出来的话，运动就确定了.

例题1 在势能为$U(r)$的有心力场中质点的运动（开始可以

作为平面运动来对待)．用哈密顿-雅可比的方法来处理时将如何？

[解] 用平面极坐标r,θ时，哈密顿函数由

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2\right)+U(r)$$

给出，所以不包含t的时候哈密顿-雅可比方程（4.41）为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+U(r)=E$$

θ为循环坐标，p_θ＝恒量是已知的，所以可以令$p_\theta=\alpha$． 这样可知，根据（4.43）的第一式：

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}=\alpha$$

因此，令：　　$S=S_r(r)+\alpha\theta$

将其代入上式得：

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2=2m\{E-U(r)\}-\frac{\alpha^2}{r^2}$$

所以

$$S_r(r)=\pm\int\sqrt{2m\{E-U(r)\}-\frac{\alpha^2}{r^2}}dr$$

因此可表为

$$S=\pm\int\sqrt{2m\{E-U(r)\}-\frac{\alpha^2}{r^2}}dr+\alpha\theta$$

以后按照（4.43）计算

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial r}=\pm\sqrt{2m\{E-U(r)\}-\frac{\alpha^2}{r^2}} \qquad \text{(i)}$$

$$\beta_r=\frac{\partial S}{\partial E}-t=\pm\int\frac{mdr}{\sqrt{2m\{E-U(r)\}-(\alpha^2/r^2)}}-t \qquad \text{(ii)}$$

$$\beta_\theta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\pm\int\frac{\alpha}{\sqrt{2m\{E-U(r)\}-(\alpha^2/r^2)}}\frac{dr}{r^2}+\theta \qquad \text{(iii)}$$

课间小憩

作用变量与前期量子论

用极坐标r, θ, ϕ描述约束于有心力场中运动的质点，若用哈密顿–雅可比方法来处理时，可以利用变量分离的方法，所得到的$r(t)$, $\theta(t)$, $\phi(t)$，都是周期运动（振动或转动）．因此，能够在它们和p_r, p_θ, p_ϕ上施行正则变换，导入作用变量J_r, J_θ, J_ϕ和角变量w_r, w_θ, w_ϕ（参照4－6）．这样，直接得出$\theta(t)$的周期与$\phi(t)$的周期相等．

当该力服从反平方定律($\propto r^{-2}$)时，$r(t)$的周期也与它们相等，因此，轨道变为封闭曲线．虽然如此，这些结果即使完全不利用上面那样高级的方法也可以从初等的角度导出来，所以哈密顿–雅可比方程及作用变量这些工具不免有些杀鸡用牛刀之感．这些方法发挥其效力之处是在于研究行星由于其它行星的影响等而偏离开普勒定律运动．正是因为这个道理，作用变量与角变量可以说是只有天文学家才用的经典力学中具有深刻含义的内容．

它突然显露头角，跃居物理学的最尖端，是以玻尔(N·Bohr)导入处理原子内电子运动（前期）量子论的量子化条件为发端的．由经典力学可能轨道中挑选出原子世界允许的轨道来，这是量子化条件．它是以“作用变量值（守恒量）仅限于普朗克常数h的整数倍”这一形式表示出来．这样，作用变量、角变量就成为前期量子理论全盛时期理论物理学家不可缺少的工具，为了作为工具使用，它就必须力求精益求精．

作为正则变换和作用变量、角变量的好参考书当中，列举出的包括有玻恩（M.Born）的《原子力学》，索莫菲(A.Sommerfeld）的《原子构造与谱线》这类书，其理由就在于此。这些书是非常出色的经典分析力学书，但在量子力学取代前期量子论已达半个世纪以上的今天，它们作为原子构造的参考书来说已完全落后于时代而成为历史性著作．在量子力学开始形式的1925～1926年，以玻恩在马萨诸塞大学讲课内容写成的《原子力学的诸问题》一书，能够看到当时研究的环境气氛，是十分有趣的．

即可．（i）的意义无须再加说明．（ii）给出$r(t)$．（iii）给出r与θ的关系，即轨道方程．从（ii）和（iii）消去r的话，$\theta(t)$也可知道．

习　题

1．利用拉格朗日方程，证明由q和p的微小变化$\{dq_i\}$，$\{dp_i\}$引起

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L$$

的微小变化能写为

$$dH=\sum(\dot{q}_i dp_i-\dot{p}_i dq_i)$$

由此导出哈密顿正则方程．其中，t，q_1，…，q_f，p_1，…，p_f可认为是相互独立的，t可以设为固定．

2．　在用势能

$$U(r)=-\frac{C}{r}\qquad (C\text{为正的常数})$$

描述有心力场中运动质点轨道近似于圆的场合，试说明用平面极坐标表示时，表现为相空间内什么样的“运动”？

3．试就一维谐振子证明刘维定理．

4．证明对泊松括号下列关系成立：

c为常数的话，$[u,\ c]=0$

$$[u,\ v]=-[v,\ u]$$

$$[u_1+u_2,\ v]=[u_1,\ v]+[u_2,\ v]$$

$$[u_1u_2,\ v]=u_1[u_2,\ v]+u_2[u_1,\ v]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[u,\ v]=\left[\frac{\partial u}{\partial t},v\right]+\left[u,\ \frac{\partial v}{\partial t}\right]$$

$$\frac{d}{dt}[u,\ v]=\left[\frac{du}{dt},\ v\right]+\left[u,\ \frac{dv}{dt}\right]$$

5．　证明：q，p与Q，P有

$$Q=\log\left(\frac{\sin p}{q}\right),\quad P=q\frac{\cos p}{\sin p}$$

的关系时，$(q, p) \to (Q, P)$为正则变换.

6. 证明：三维笛卡儿坐标与极坐标间的点变换能由母函数

$$W = -(p_x r\sin\theta\cos\phi + p_y r\sin\theta\sin\phi + p_z r\cos\theta)$$

导出.

7. 建立不受力而作匀速运动质点哈密顿-雅可比偏微分方程，并求解.

8. 利用哈密顿-雅可比偏微分方程讨论抛物运动时，得什么结果？

第五章　力学体系的微振动

在力学体系运动中，有一种非常普遍的运动，即微振动．它在现代物理学中也具有广泛的应用．此外，它还涉及到若干重要的物理数学技巧．由于利用的是拉格朗日方程，因此，不用看第三章、第四章，先阅读本章，也应当能理解其内容．在安排上，我们是企图通过具体例子学会大体的内容之后，再学习普遍的理论．

§5-1　双　摆

先从简单的例子开始，利用的方法是拉格朗日运动方程．

如图5-1所示，在长度为l_1的线前端，系有质量m_1的重物，在其后再系上一根长度为l_2的线，并栓上质量m_2的重物，这就是双摆．考察它在一个垂直平面内（图所在的平面内）进行微小振动的情形．

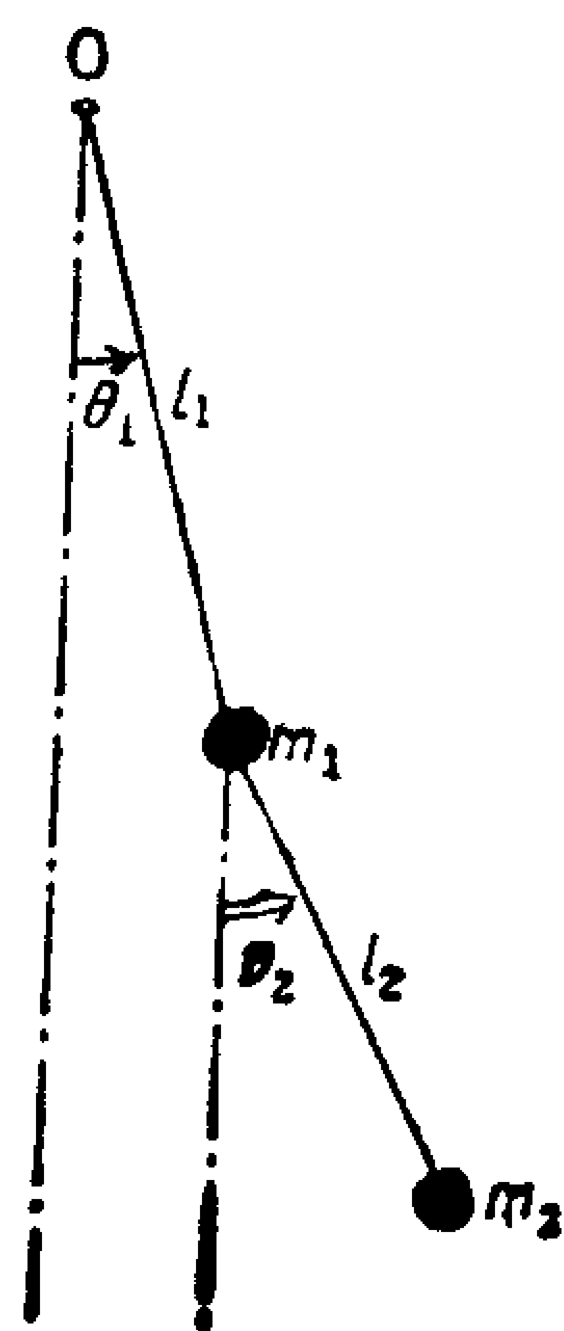


图　5-1

以两根绳与铅直方向组成的角度θ_1、θ_2为广义坐标，来确定重物的位置，这时的约束条件可以自动满足．由于仅考虑角度小的情况，所以取一级微量的近似时，可以设：

$$\sin\delta \doteq \mathrm{tg}\delta \doteq \delta, \qquad \cos \doteq 1$$

这样一来，重物运动仅为水平方向，在这样的近似下，m_1的速度为$l_1\dot{\theta}_1$，m_2的速度为$l_1\dot{\theta}_1+l_2\dot{\theta}_2$，所以动能

$$T=\frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\theta}_1+\frac{m_2}{2}(l_1\dot{\theta}_1+l_2\dot{\theta}_2)^2$$

取势能当$\theta_1=\theta_2=0$为零时，势能可写为

$$U=m_1gl_1(1-\cos\theta_1)+m_2g\{l_1(1-\cos\theta_1)$$
$$+l_2(1-\cos\theta_2)\}$$

设$\cos\theta_i=1$时，$U\equiv0$，使摆振动的力将会完全消失，所以，不得不保留到最低次非零项的二次项，于是，

$$1-\cos\theta_i\doteq\frac{1}{2}\theta_i^2$$

因此

$$U=\frac{1}{2}m_1gl_1\theta_1^2+\frac{1}{2}m_2g(l_1\theta_1^2+l_2\theta_2^2)$$
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\theta_1^2+\frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+2m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2$$
$$-(m_1+m_2)gl_1\theta_1^2-m_2gl_2\theta_2^2] \tag{5.1}$$

构成拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta_i}\qquad(i=1,\ 2)$$

可得

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1+m_2l_2\ddot{\theta}_2&=-(m_1+m_2)g\theta_1\\ l_1\ddot{\theta}_1+l_2\ddot{\theta}_2&=-g\theta_2\end{aligned} \tag{5.2}$$

为了使讨论更具体，让我们来讨论$m_1=m_2$，$l_1=l_2=l$的情况．这时(5.2)变为

$$\begin{aligned}2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2&=-2\gamma\theta_1\\ \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2&=-\gamma\theta_2\end{aligned}\qquad\left(\gamma=\frac{g}{l}\right) \tag{5.3}$$

所以，在第一个式子上加上第二个式子的λ倍，得到下式：

$$\frac{d^2}{dt^2}[(2+\lambda)\theta_1+(1+\lambda)\theta_2]=-\gamma(2\theta_1+\lambda\theta_2)$$

这里，是想求出能使左边[…]内和右边的（…）成比例的λ．为此，只要求解

$$\frac{2+\lambda}{1+\lambda}=\frac{2}{\lambda}$$

就可以了．所以能简单求出：

$$\lambda=\pm\sqrt{2}$$

将此代入上面的式子，得：

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{2}\,\theta_1\pm\theta_2)=-(2\mp\sqrt{2})\gamma(\sqrt{2}\,\theta_1+\theta_2)$$

故设：

$$\omega_1=\sqrt{(2-\sqrt{2})\gamma},\qquad \omega_2=\sqrt{(2+\sqrt{2})\gamma}$$

时，上式的通解为

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\theta_1+\theta_2&=A\cos(\omega_1t+\alpha)\\ \sqrt{2}\,\theta_1-\theta_2&=B\cos(\omega_2t+\beta)\end{aligned}\qquad(5.4)$$

A，B，α，β为积分常数．根据上面两个式子，可得：

$$\begin{aligned}\theta_1&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{A\cos(\omega_1t+\alpha)+B\cos(\omega_2t+\beta)\}\\ \theta_2&=\frac{1}{2}\{A\cos(\omega_1t+\alpha)-B\cos(\omega_2t+\beta)\}\end{aligned}\qquad(5.5)$$

导入的常数，可由初始条件等来确定．

即使m_1，m_2，l_1，l_2取任意值，都可以相同地求解．

(5.5)式表明：$\theta_1(t)$、$\theta_2(t)$中的任一个，都是两个简谐振动——圆频率ω_1和ω_2——的叠加．但是，作为一种特殊场合来说，当$A\neq0$，$B=0$时，则$\theta_1(t)$也好，$\theta_2(t)$也好，都是圆频率为ω_1的简谐振动．反之，设$A=0$，$B\neq0$时，为圆频率ω_2的简谐振动．ω_1的情况下，θ_1与θ_2的振幅比为

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}A : \frac{1}{2}A = 1 : \sqrt{2}$$

ω_2的情况下，两者的振幅比为

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}B : -\frac{1}{2}B = 1 : -\sqrt{2}$$

也就是说，若给定满足这个关系的初始条件的话，则摆为单纯的振动．而在一般情况下，将形成(5.5)那样复杂的运动．

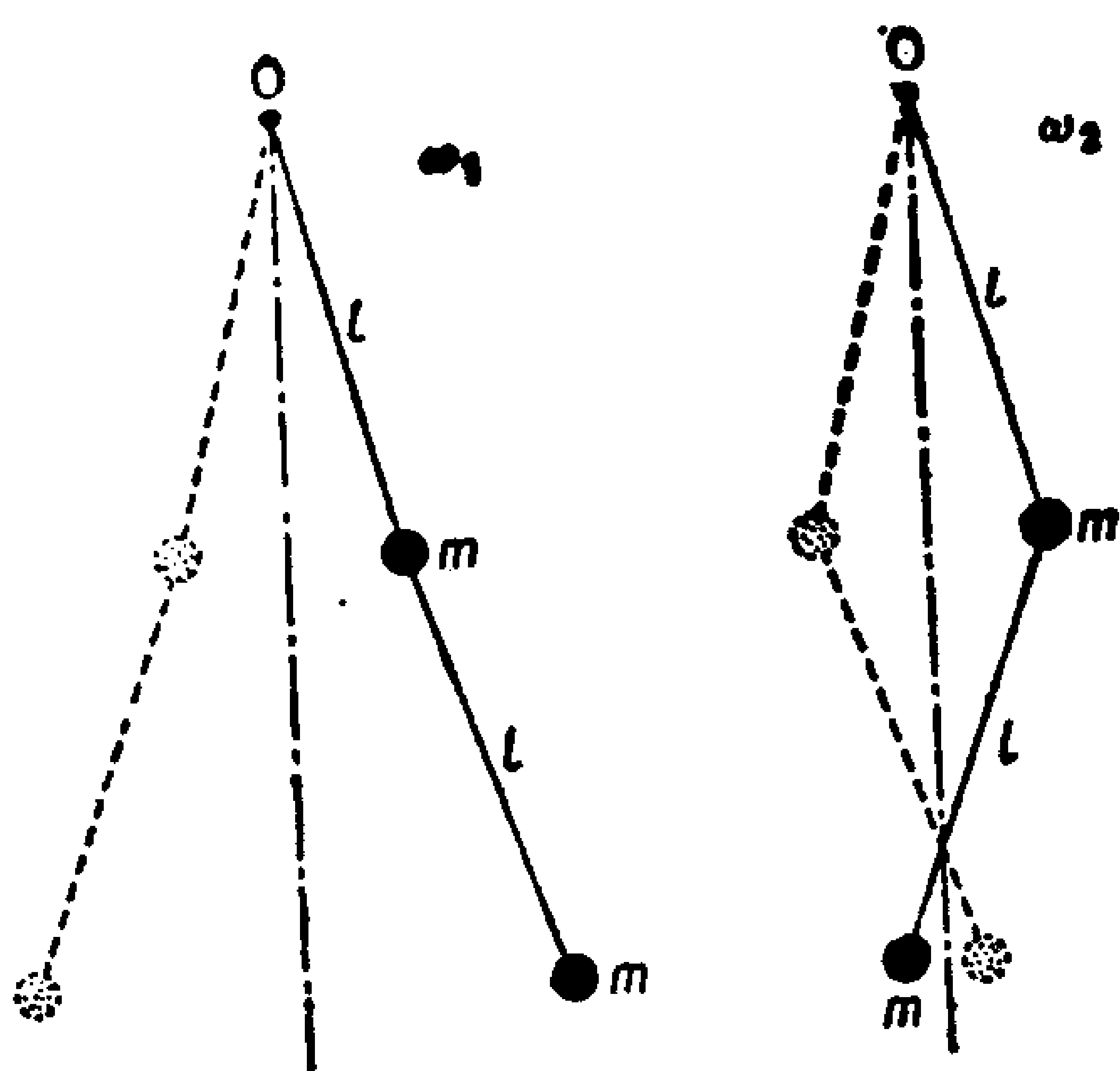


图 5-2

$\sqrt{2}\theta_1 \pm \theta_2$这种特殊的组合，构成了(5.4)那样的简谐振动．这件事暗示出，若将广义坐标由θ_1，θ_2进行点变换，把由

$$Q_1 = \sqrt{2}\theta_1 + \theta_2,$$

$$Q_2 = \sqrt{2}\theta_1 - \theta_2 \tag{5.6}$$

的坐标做为新的广义坐标的话，则有：

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1, \qquad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 \tag{5.7}$$

实际上，如果反过来求解(5.6)，将所得到的

$$\theta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)$$

代入在(5.1)式中令$m_1 = m_2 = m$、$l_1 = l_2 = l$的拉格朗日函数

$$L = \frac{ml^2}{2}(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{mgl}{2}\left(2\theta_1^2 - \theta_2^2\right)$$当中时，则

$$L = \frac{ml^2}{8}\{(2+\sqrt{2})\dot{Q}_1^2 + (2-\sqrt{2})\dot{Q}_2^2\}$$

$$-\frac{mgl}{4}\left(Q_1^2+Q_2^2\right)$$

成为$L=L_1+L_2$这种可以分离开来的形式．由此，列出运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial Q_i} \qquad (i=1,\ 2)$$

便可得到(5·7)式：

$$\ddot{Q}_1=-(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}Q_1$$

$$\ddot{Q}_2=-(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}Q_2$$

这种新广义坐标$Q_1(t)$，$Q_2(t)$所表示的运动的圆频率ω_1、ω_2的谐振，如(5·6)式表示的那样，它是由原来坐标进行特殊组合而成（其结果就象图5-2那样的振幅比），把它称做此时**简正振动**或**简正模**，将新坐标Q_1Q_2称做**简正坐标**．

在原来的拉格朗日函数中，存在着与$\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$成比例、将$\theta_1$振动和$\theta_2$振动连接起来的项．假如没有该项，那么$\theta_1$与$\theta_2$(跟$Q_1$,$Q_2$一样）成为独立的两个简谐振动．在不同场合下，该项在U中以与$\theta_1\theta_2$成正比的形式出现，该项在T与U两者中都出现，θ_1，$\theta_2\to Q_1$,Q_2变换，可认为是为了使θ_i的二次齐次式T或θ_i的二次齐次式U当中消去交叉项，而将它们取平方和的形式．下一节我们学习这种方法的一般性理论．

§5-2 平衡点与拉格朗日函数

所谓力学体系的振动，是在不加外力情况下，**将持续保持平衡、静止状态的体系中**，受到某种作用，使之由平衡位置少许偏移时，由于使其恢复原状力（恢复力）的作用；以及因惯性的存在，在恢复原来状态的过程中，不能停止，顺势向着反方向移动而

产生的情况．那么，究竟用什么样的式子来表示它呢？

考虑f个自由度的体系，设描述该运动的广义坐标为q_1，q_2，…，q_f．上节的θ_1，θ_2就是其中一个例子．设该体系是由不显含t的拉格朗日函数$L=T-U$来描述，U仅为q_1，q_2，…，q_f的函数，而与速度$\{\dot{q}_i\}$无依存关系．

$$T=T(q,\dot{q}),\qquad U=U(q)$$

设在$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\cdots=\dot{q}_f=0$时，动能$T=0$．这就意味着坐标系是静止的（若不是这种情况的例子可见第二章 §2-3问题3）．于是，T不包含$\dot{q}_i$的一次项，而成为二次齐次式．

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}K_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{5.8}$$

选取系数使得$K_{ij}=K_{ji}$．

从拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

得到静止状态的特别解：

$$q_i=q_i^{(0)}=\text{常数}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

就是要右边的$\partial L/\partial q_i$——$\{q_i\}$和$\{\dot{q}_i\}$的函数——在代入$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\cdots=\dot{q}_f=0$，$q_1=q_1^{(0)}$，$q_2=q_2^{(0)}$，…，$q_f=q_f^{(0)}$时，变为零：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f) \tag{5.9}$$

这是因为

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}$$

是$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_f$的一次齐次式，将其对t微分（等于$\dot{p}_i$）代入$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\cdots=\dot{q}_f=0$，$\ddot{q}_1=\ddot{q}_2=\cdots=\ddot{q}_f=0$时将变为零．从(5.9)的$f$个式子中可求出$q_1^{(0)}$，$q_2^{(0)}$，…，$q_f^{(0)}$，因此，可以知道平衡位置．

故设将此位置取为q_1，q_2，…，q_f的原点，即将$q_i-q_i^{(0)}$

改写为q_i．这样，只限于考虑该平衡位置附近的运动，对于$U(q_1, q_2, \cdots, q_f)$来说，就可以用展开式

$$U=U_0+\sum_i b_i q_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij} q_i q_j$$

了．同样，一般情况下，(5.8)式中q函数的K_{ij}也可展开为$q_1, q_2, \cdots, q_f$的幂级数，但其中含有二级微量$\dot{q}_i \dot{q}_j$，故只取展开式的0次项（常数项）其余均舍去．也就是说，(5.8)中K_{ij}是不取决于q的常数．这样一来有$\partial T/\partial q_i=0$，所以，(5.9)式为

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

下标0的意义是：取与$q_1=q_2=\cdots=q_f=0$相对应$\partial U/\partial q_i$的值．这样，就必须消除掉U展开式中的一次项，所以

$$b_1=b_2=\cdots b_f=0$$

若将U的原点改取为U_0，则结果可表示出：

$$U=\frac{1}{2}\sum_{ij} c_{ij} q_i q_j \tag{5.10}$$

所以，取$c_{ij}=c_{ji}$跟K_{ij}是一样的．

当稍微偏离平衡位置$q_1=q_2=\cdots=q_f=0$时，必然要有使其恢复到原来位置的力发生作用，所以，平衡位置必须在U取最小值的地方．因此，(5.10)必须是正值二次型．所谓正值二次型，就是例如象

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant 0$$

那样，除去$q_1=q_2=\cdots=q_f=0$以外，必须取正值的二次齐次式．

从定义上讲，动能是不能取负值的量，因此，(5.8)式也是关于$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f$的正值二次型．这样一来，可以知道，我们所讨论体系的拉格朗日函数是由二个正值二次型表示的：

$$L=T-U=\frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-\frac{1}{2}\sum c_{ij} q_i q_j \tag{5.11}$$

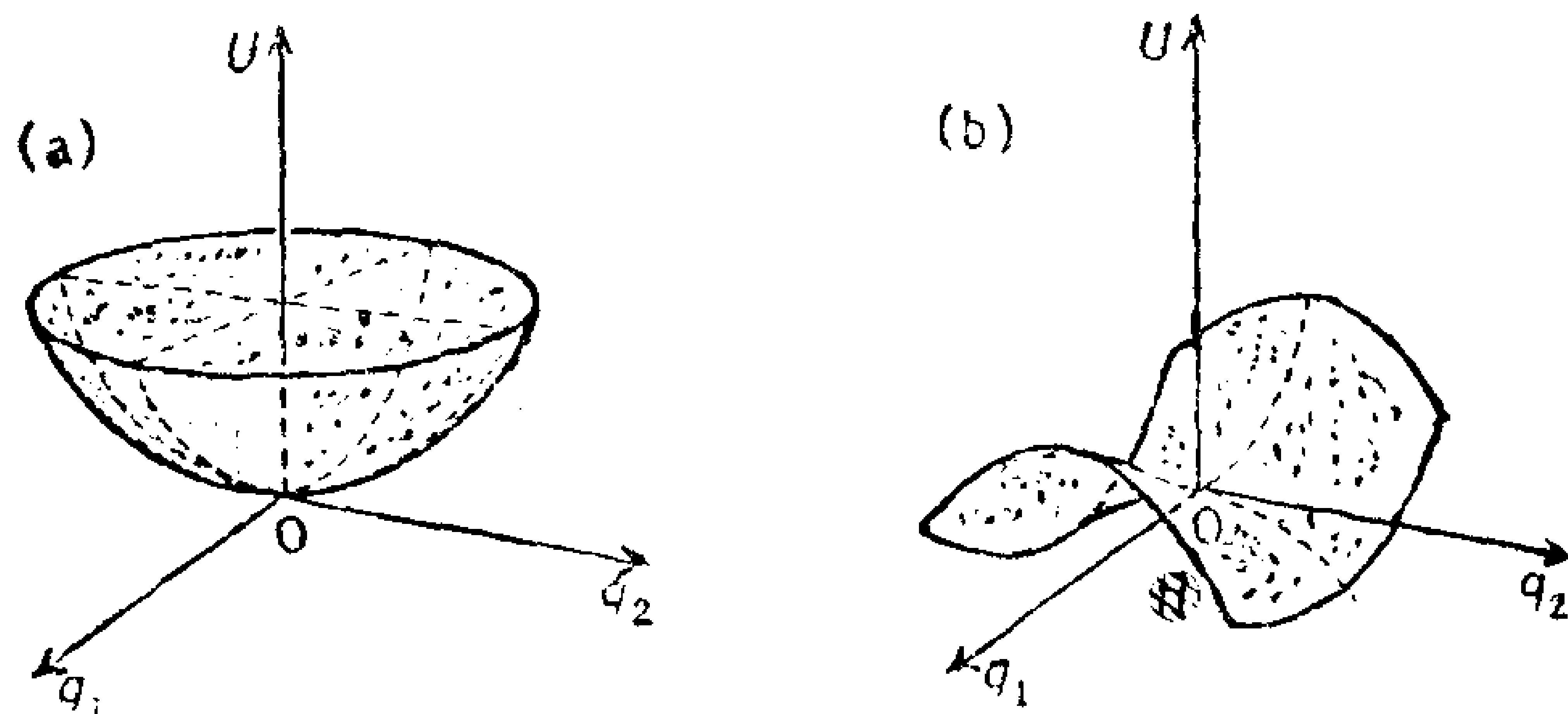


图5-3 平衡是稳定的，为了产生以其为中心的振动，平衡位置必须象(a)那样处于U变为极小处，不允许有极大或象(b)那样的鞍点．

问题1 如上面的形式讨论(5.1)式．

§5-3 简正振动和简正坐标 I

由拉格朗日函数(5.11)建立运动方程时，可得到：

$$\sum_j K_{ij}\ddot{q}_j+\sum_j c_{ij}q_j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ f) \tag{5.12}$$

f个方程．本节的课题就是求出简正振动的频率和简正坐标．发生简正振动时，如§5-1所看到的那样，是所有的q_j都有相同圆频率ω（随振幅正负的不同，有时相位相反）那样的振动：

$$q_j=A_j\cos(\omega t+\alpha) \tag{5.13}$$

因此，将它代入(5.12)时成为

$$\sum_j(-K_{ij}\omega^2+c_{ij})A_j\cos(\omega t+\alpha)=0$$

所以能得到

$$\sum_j(K_{ij}\omega^2-c_{ij})A_j=0 \tag{5.14}$$

这个式子，如果使用矩阵，也可以表示为

$$\begin{pmatrix} K_{11}\omega^2-c_{11} & K_{12}\omega^2-c_{12} & \cdots & K_{1f}\omega^2-c_{1f} \\ K_{21}\omega^2-c_{21} & K_{22}\omega^2-c_{22} & \cdots & K_{2f}\omega^2-c_{2f} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ K_{f1}\omega^2-c_{f1} & K_{f2}\omega^2-c_{f2} & \cdots & K_{ff}\omega^2-c_{ff} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix}=0 \tag{5.14a}$$

如果把(5.14)看成是对于f个未知数A_1，A_2，…，A_f的联立方程，则似乎其数目也正好是f个，但实际并非如此．(5.14)的各项都以一样的形式包含A_f，所以正确说来，例如说用A_1全体，可以把它看成是求$f-1$个A_j/A_1($j=1$，2，3，…，f）的方程；也就是说，根据(5.14)决定的只是$A_1:A_2:\cdots:A_f$之比，绝对值尚不能确定．这样一来，应当确定的未知数为$f-1$个，而方程是f个，过剩了．所以，例如说，(5.14)中最初的$f-1$个（$i=1$，2，…，$f-1$）所决定

$$\frac{A_2}{A_1},\ \frac{A_3}{A_1},\ \cdots,\ \frac{A_f}{A_1}$$

代入最后的式子($i=f$)，它必须成立．根据数学定理，这可用以下的必要充分条件来表示，即由(5.14a)的方阵($K_{ij}\omega_2-c_{ij}$)构成的行列式为零．

$$\begin{vmatrix} K_{11}\omega^2-c_{11} & K_{12}\omega^2-c_{12} & \cdots & K_{1f}\omega^2-c_{1f} \\ K_{21}\omega^2-c_{21} & K_{22}\omega^2-c_{22} & \cdots & K_{2f}\omega_2-c_{2f} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ K_{f1}\omega^2-c_{f1} & K_{f2}\omega^2-c_{f2} & \cdots & K_{ff}\omega^2-c_{ff} \end{vmatrix}=0 \tag{5.14b}$$

但实际上ω^2也是未知数，所以如选取能满足这个式子的ω^2的话，则可求出象(5.13)那样的解．(5.14b) 是关于ω^2的f次代数方程，所以，解出这个式子就能求得f个根ω_1^2，ω_2^2，…，ω_f^2（重根分

别计算). 此外，如果T和U都是正值二次型的话，则数学定理告诉我们，这f个根都是正值. 即使特意把ω_j设为负值，在物理上，(5.13)的结果跟正值相同. 所以，如果只取平方根的正值

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_f$$

的话，它就是简正振动的圆频率. 简正振动的频率通常叫做**固有频率**. 而且，习惯上把(5.14b)那样的方程，在物理上称为**久期方程**.

问题 2 在§5-1的双摆当中，对于$l_1=l_2=l$，$m_1=m_2=m$的场合，试用以上方法，求出简正振动的圆频率.

§5-4 简正振动和简正坐标 II

如果解出久期方程，求得ω_1^2，ω_2^2，…，ω_f^2的话，分别对它的解(5.14)，确定A_1，A_2，…，A_f. 能够决定的仅仅是它们的比. 目前，适当地——例如取$A_1=1$时——将可确定的量设为

$$\text{对于}\ \omega_1^2\ \text{为}\ A_1^{(1)},\ A_2^{(1)},\ \cdots,\ A_f^{(1)}$$

$$\text{对于}\ \omega_2^2\ \text{为}\ A_1^{(2)},\ A_2^{(2)},\ \cdots,\ A_f^{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{对于}\ \omega_f^2\ \text{为}\ A_1^{(f)},\ A_2^{(f)},\ \cdots,\ A_f^{(f)}$$

它们可以看成(5.14)式，即

$$\sum_j (K_{ij}\omega_k^2 - c_{ij})A_j^{(k)} = 0 \tag{1}$$

对于$\omega_l\ (\neq \omega_k)$来说

$$\sum_j (K_{ij}\omega_l^2 - c_{ij})A_j^{(l)} = 0$$

式成立. 这里，把i和j互换，设：

$$\sum_i (K_{ji}\omega_l^2 - c_{ji})A_i^{(l)} = 0$$

利用$K_{ji}=K_{ij}$，　　$c_{ji}=c_{ij}$，则

$$\sum_i (K_{ij}\omega_l^2-c_{ij})A_i^{(l)}=0 \tag{ii}$$

将(i)式乘以$A_i^{(l)}$，对i求和，并将(ii)式乘以$A_j^{(k)}$，对j求和，则形成两个式子：

$$\sum_i \sum_j (K_{ij}\omega_k^2-c_{ij})A_i^{(l)}A_j^{(k)}=0$$

$$\sum_i \sum_j (K_{ij}\omega_l^2-c_{ij})A_i^{(l)}A_j^{(k)}=0$$

作减法，消掉c_{ij}的项，则

$$(\omega_k^2-\omega_l^2)\sum_i \sum_j K_{ij}A_i^{(l)}A_j^{(k)}=0$$

现在设$\omega_k^2\neq\omega_l^2$，所以，可得下列重要关系：

$$\boxed{\sum_i \sum_j K_{ij}A_i^{(l)}A_j^{(k)}=0} \tag{5.15}$$

把它称为

对于ω_k的解：$\left(A_1^{(k)},\ A_2^{(k)},\ \cdots,\ A_f^{(k)}\right)$

对于ω_l的解：$(A_1^{(l)},\ A_2^{(l)},\ \cdots,\ A_f^{(l)})$

的**正交关系**．当两个矢量$A^{(1)}$和$A^{(2)}$的分量$\left(A_x^{(1)},\ A_y^{(1)},\ A_z^{(1)}\right)$和$\left(A_x^{(2)},\ A_y^{(2)},\ A_z^{(2)}\right)$之间存在着$A_x^{(1)}A_x^{(2)}+A_y^{(1)}A_y^{(2)}+A_z^{(1)}A_z^{(2)}=0$的关系，$A^{(1)}$和$A^{(2)}$垂直．所以把它扩展成$f$维，把$(A_1^{(k)},\ \cdots,\ A_f^{(k)})$看成$f$维矢量的内积，把(5.15)左边看成这样的两个$f$维矢量的内积（数量积）．在$K_{ij}=\delta_{ij}$时，则成为$\sum_i A_i^{(l)}A_i^{(k)}$与普通矢量的内积（除了维数不同之外）一致．可以认为是将其扩展至$K_{ij}\neq\delta_{ij}$场合的结果．

用这种（扩展了的）内积定义，并利用通常的矢量与其自身

的内积$|A|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$等于其大小（模）的平方这一事实，通过

$$\sum_i \sum_j K_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(k)}=1 \tag{5.16}$$

将"矢量"$(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \cdots, A_f^{(k)})$的模规定为1．于是，不仅其比值，而且$A_i^{(k)}$的绝对值也是确定的．然而，即使全部符号相反，也是一样，唯有这一点是不确定的．把(5.16)那样的方法称为**规格化**或**归一化**．

现在假设ω_1，ω_2，…，ω_f都不相同，如果利用上述方法所求得的相互正交的f个解$(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \cdots, A_f^{(k)})(k=1, 2, \cdots, f)$，那么与双摆(5.5)式相对应的通解为

$$q_1(t)=A_1^{(1)} a_1 \cos(\omega_1 t+\alpha_1)+A_1^{(2)} a_1 \cos(\omega_2 t+\alpha_2)+\cdots$$
$$+A_1^{(f)} a_f \cos(\omega_f t+\alpha_f)$$
$$q_2(t)=A_2^{(1)} a_1 \cos(\omega_1 t+\alpha_1)+A_2^{(2)} a_2 \cos(\omega_2 t+\alpha_2)+\cdots$$
$$+A_2^{(f)} a_f \cos(\omega_f t+\alpha_f)$$

……………………

$$q_f(t)=A_f^{(1)} a_1 \cos(\omega_1 t+\alpha_1)+A_f^{(2)} a_2 \cos(\omega_2 t+\alpha_2)+\cdots$$
$$+A_f^{(f)} a_f \cos(\omega_f t+\alpha_f) \tag{5.17}$$

a_1，α_1；a_2，α_2：…；a_f，α_f是应当能由初始条件等来确定的积分常数．在该式中，只有a_k是有限的，而其它a_i都为0时，表明第k个简正振动发生．$A_1^{(k)}$，$A_2^{(k)}$，…，$A_f^{(k)}$应当给出此时q_1，q_2，…，q_f的振幅比．

在（5.17）的第一式上乘以$\sum_j K_{1j} A_j^{(k)}$，第二式乘以$\sum_j K_{2j} A_j^{(k)}$，…，最后的式子乘以$\sum_j K_{fj} A_j^{(k)}$，并将全体相

加，则左边为

$$\sum_i \sum_j K_{ij} A_j^{(k)} q_i(t)$$

右边为

$$\sum_i \sum_j K_{ij} A_i^{(1)} A_j^{(k)} a_1 \cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\sum_i \sum_j K_{ij} A_i^{(2)} A_j^{(k)} a_2 \cos(\omega_2 t+\alpha_2)+\cdots+\sum_i \sum_j K_{ij} A_i^{(f)} A_j^{(k)} \cos(\omega_f t+\alpha_f)$$

如果利用正交关系(5.15)式，那么，在该求和之中将只剩下第k项．若象(5.16)式那样规格化，其结果，右边就成为$a_k\cos(\omega_k t+\alpha_k)$．因此，可得到

$$\sum_i \sum_j K_{ij} A_j^{(k)} q_i(t)=a_k \cos(\omega_k t+\alpha_k) \qquad (k=1,2,\cdots,f)$$

这就是与双摆情况下(5.14)式相对应的式子．因此，以上式左边

$$Q_k(t)=\sum_i \left(\sum_j A_{ij} A_j^k\right) q_i(t) \tag{5.18a}$$

来定义简正坐标$Q_k(t)$．因为(5.17)式为

$$q_i(t)=\sum_k A_i^{(k)} a_k \cos(\omega_k t+\alpha_k)$$

故根据$a_k\cos(\omega_k t+\alpha_k)=Q_k(t)$，可以写出：

$$q_i(t)=\sum_i A_i^{(k)} Q_k(t) \tag{5.18b}$$

由(5.18a)和(5.18b)可给出$(q_1, q_2, \cdots, q_f) \leftrightarrow (Q_1, Q_2, \cdots, Q_f)$的变换．

在利用q_1，q_2，…，q_f的情况下，不可能分解为独立的简谐振动，振动形成相互作用的形式，而如果用新的Q_1，Q_2，…，Q_f来表示时，它们将成为独立的简谐振动．这一点，根据以上做法，想必不难理解．用拉格朗日方程能够确认这一点．通过以下的问题请读者自行解决．

问题3　试将(5.18b)式中之i改写为j，代替(5.12)，用(5.14)消去

c_{ij}. 将得到的式子乘以 $A_i^{(l)}$ 后. 对i求和, 而导出$\ddot{Q}_l = -\omega_l^2 Q_l$.

下面简单谈一下久期方程具有重根的情况，这时振动称为是**简并的**. 现在，假定ω_1和ω_2是简并的($\omega_1=\omega_2$)，其固有振动频率ω_3，ω_4，……不相等. 将($A_1^{(k)}$，$A_2^{(k)}$，… $A_f^{(k)}$)合并缩写为$\boldsymbol{A}^{(k)}$. 若用某种方法，找出(5.14)对于$\omega_1=\omega_2$的两组解，并将它们设为$\boldsymbol{A}'$，$\boldsymbol{A}''$. 其中，$\boldsymbol{A}'$和$\boldsymbol{A}''$是一次独立的(一方不是另一方的常数倍). 与导出(5.15)的讨论一样，$\boldsymbol{A}'$与$\boldsymbol{A}''$二者均与$\boldsymbol{A}^{(3)}$，$\boldsymbol{A}^{(4)}$，…正交，这是肯定的，但是不能保证$\boldsymbol{A}'$与$\boldsymbol{A}''$正交. 现在，假定给出$\boldsymbol{A}'$和$\boldsymbol{A}''$的任意线性组合$\boldsymbol{A}'''=c_1\boldsymbol{A}'+c_2\boldsymbol{A}''$，则它也是(5.14)对于$\omega_1=\omega_2$的解. 若将$\boldsymbol{A}'$和$\boldsymbol{A}''$进行内积，则

$$(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A}''')=c_1(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A}')+c_2(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A}'')$$

如果选择c_1、c_2以使它为0，即取

$$\frac{c_1}{c_2}=-\frac{(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A}'')}{(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A}')}$$

$\boldsymbol{A}'$与$\boldsymbol{A}''$正交. 它们都是(5.14)对$\omega_1=\omega_2$的解，$\boldsymbol{A}^{(3)}$，$\boldsymbol{A}^{(4)}$，……也正交. 如有必要，也易于将其规范化，为

$$(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A}')=(\boldsymbol{A}'''\cdot\boldsymbol{A}''')=1$$

这样得到的$\boldsymbol{A}'$和$\boldsymbol{A}'''$作为$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)}$的话，那么，$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)}$，$\boldsymbol{A}^{(3)}$，……，$\boldsymbol{A}^{(f)}$就将满足

$$(\boldsymbol{A}^{(l)}\cdot\boldsymbol{A}^{(k)})=\delta_{lk}$$

由上述做法可知，$\boldsymbol{A}^{(1)}$，$\boldsymbol{A}^{(2)}$的选取方法并不是唯一的，例如，将$\boldsymbol{A}''$定为$\boldsymbol{A}^{(1)}$，而将与其正交的矢量作为$\boldsymbol{A}^{(2)}$也是可以的.

§5-5 分子的振动

只是一般性的论述，难以描绘出具体的图象来. 在这里，以CO_2分子的振动为例加以说明. 这种二氧化碳分子是碳原子在中

央，两侧的氧原子等距（设为a）而形成的直线形的分子，现在在静止的平衡状态下，选取分子轴的方向为x轴，与其垂直的方向为y，z轴（图5-4）．中心的碳原子位移（不是位置，而是离开平衡位置的位移）为X_0，Y_0，Z_0，两侧氧原子的位移为X_1，Y_1，Z_1，X_2，Y_2，Z_2．CO_2分子的运动一般通过9个广义坐标来描述．

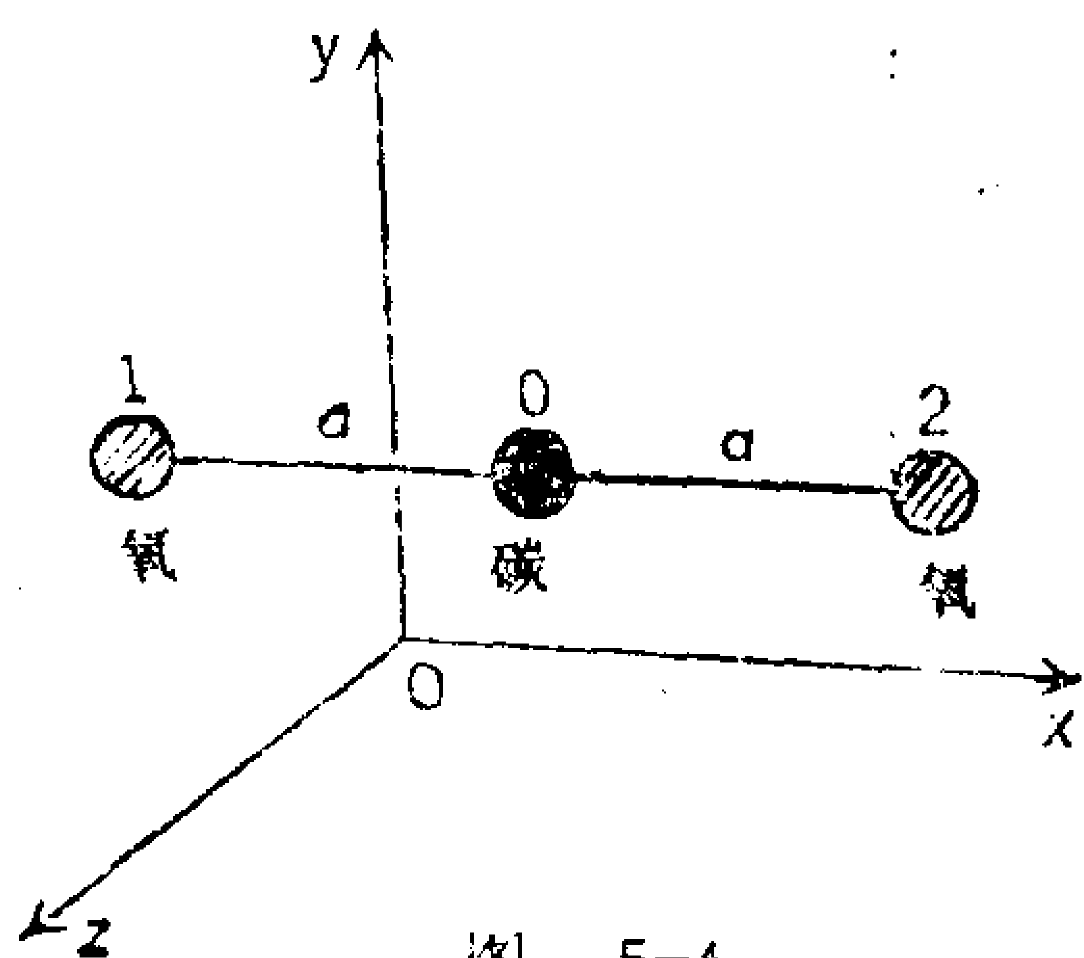


图 5-4

因为考虑到位移是微小的，X_0，X_1，X_2使原子间隔产生变化，作为表示伸缩振动的坐标来使用．在这里认为是没有那样伸缩的情况（加上约束条件），只着眼于y方向和z方向的位移．这样一来，分子恢复力对于图5-5的角变量起作用．如果角变量不大的话，其势能可写成：

$$U=\frac{\kappa}{2}\theta^2$$

让我们以Y_i，Z_i来表示这个θ^2．图5-5 2与2′的距离是$a\theta$，正如将分子投影在yz平面上而从图5-6中所看到的，它可由

$$a\theta=\sqrt{(2Y_0-Y_1-Y_2)^2+(2Z_0-Z_1-Z_2)^2}$$

给出．因此，设$k=\kappa/a^2$，则U成为

$$U=\frac{k}{2}\{(2Y_0-Y_1-Y_2)^2+(2Z_0-Z_1-Z_2)^2\}$$

$$=\frac{k}{2}\{4Y_0^2-4Y_0(Y_1+Y_2)+(Y_1+Y_2)^2\}$$

$$+\frac{k}{2}\{4Z_0-4Z_0(Z_1+Z_2)+(Z_1+Z_2)^2\}$$

(Y_1+Y_2)，(Z_1+Z_2)未拆散而原封不动地保留下来，其理由不久就可以弄清楚．

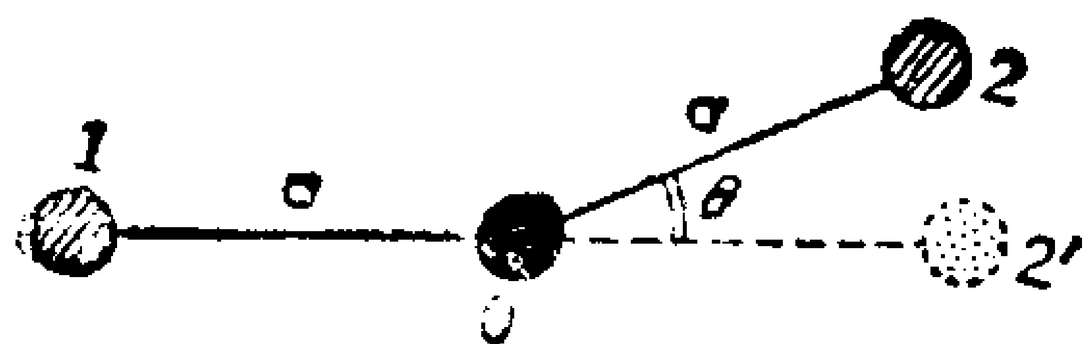


图 5-5

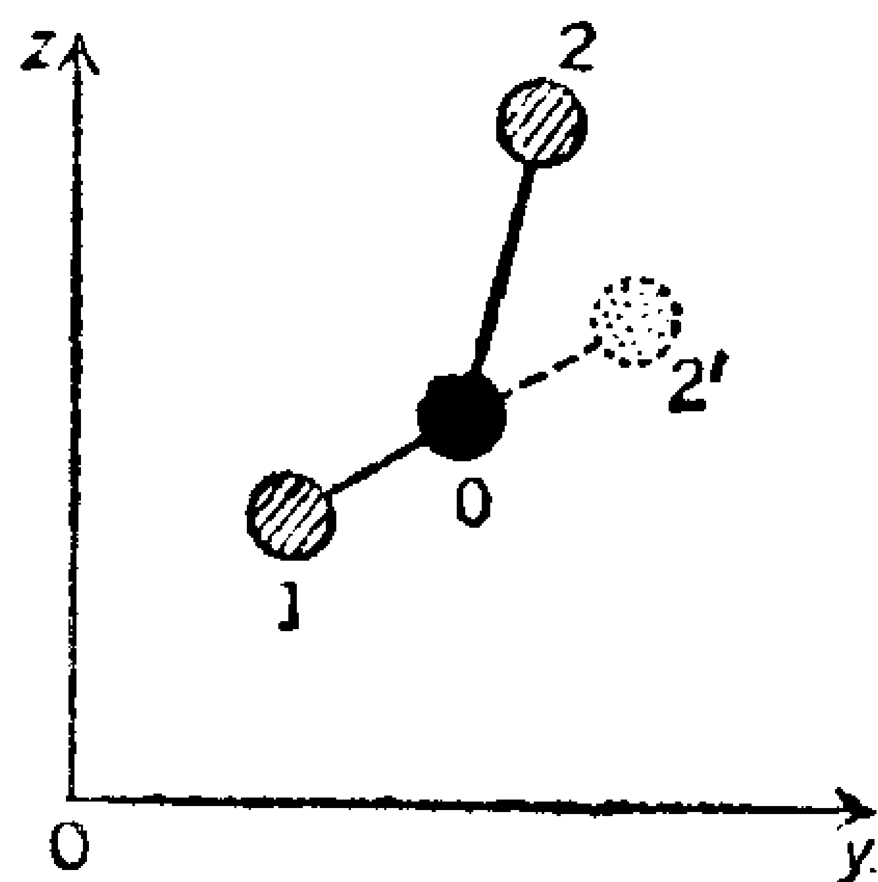


图 5-6

设C的质量为M，O的质量为m，则动能为

$$T=\frac{M}{2}(\dot{Y}_0^2+\dot{Z}_0^2)+\frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2+\dot{Z}_1^2+\dot{Y}_2^2+\dot{Z}_2^2)$$

$$=\left\{\frac{M}{2}\dot{Y}_0^2+\frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2+\dot{Y}_2^2)\right\}+\left\{\frac{M}{2}\dot{Z}_0^2+\frac{m}{2}(\dot{Z}_1^2+\dot{Z}_2^2)\right\}$$

因为U也好，T也好，都可分离为y方向的项和z方向的项之和，所以，不必将整体一起计算，可以分别计算之后再合在一起进行考查．因而，我们今后将只计算y方向，这样拉格朗日函数为

$$L_y=\frac{M}{2}\dot{Y}_0^2+\frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2+\dot{Y}_2^2)$$

$$-\frac{k}{2}\{4Y_0^2-4Y_0(Y_1+Y_2)+(Y_1+Y_2)^2\} \quad (5.19)$$

在此，进行部分点变换（相当于在Y_1Y_2空间中将坐标轴旋转45°）．

$$Y_+=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1+Y_2),\quad Y_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1-Y_2) \qquad (5.20)$$

即可得知

$$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_++Y_-),\quad Y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_+-Y_-)$$

$$\dot{Y}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Y}_++\dot{Y}_-),\quad \dot{Y}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Y}_+-\dot{Y}_-)$$

因此

$$\dot{Y}_1^2+\dot{Y}_2^2=\dot{Y}_+^2+\dot{Y}_-^2$$

L或为

$$L_y=\frac{M}{2}\dot{Y}_0^2+\frac{m}{2}\dot{Y}_+^2+\frac{m}{2}\dot{Y}_-^2-\frac{4k}{2}Y_0^2-2\sqrt{2}kY_0Y_+$$

$$-\frac{2k}{2}Y_+^2 \tag{5.21}$$

在这里，动能当中没有交叉项（$\dot{Y}_i\dot{Y}_j(i\neq j)$的项）为了取$K_{ij}=\delta_{ij}$，取

$$\sqrt{M}Y_0=q_0,\quad \sqrt{m}Y_+=q_1,\quad \sqrt{m}Y_-=q_2 \tag{5.22}$$

当然有，$\sqrt{M}\dot{Y}_0=\dot{q}_0$，$\sqrt{m}\dot{Y}_\pm=\dot{q}_{1,2}$. 这样

$$L_y=\frac{1}{2}(\dot{q}_0^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{4k}{2M}q_0^2-\frac{2k}{2m}q_1^2+\frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{Mm}}q_0q_1 \tag{5.23}$$

以下处理就很方便了. K_{ij}，c_{ij}成为

$$K_{ij}=\delta_{ij},\quad c_{00}=\frac{4k}{M},\quad c_{11}=\frac{2k}{m},\quad c_{01}=-\sqrt{\frac{2}{Mm}}2k$$

建立起拉格朗日运动方程：

$$\ddot{q}_0=-\frac{4k}{M}q_0+2k\sqrt{\frac{2}{Mm}}q_1$$

$$\ddot{q}_1=2k\sqrt{\frac{2}{Mm}}q_0-\frac{2k}{m}q_1 \tag{5.24}$$

$$\ddot{q}_2=0$$

q_0与q_1形成复合振动. 可以看出，在q_2中不存在恢复力，所以不会形成振动. 因此，考虑$q_0=0$，$q_1=0$，但$q_2\neq0$的情况即可.

由于$Y_0=0$，$Y_1+Y_2=0$，$Y_1-Y_2\neq0$ $\therefore Y_1=-Y_2$ 因中央的碳原子不动，氧原子1和2以相反方向与分子轴线垂直运动，所以这是分子的回转，而恢复力应对回转不起作用. 因此，如果允许$q_2(t)\neq0$存在，则分子将按原状回转. 与位移微小的假定完

全相反．这是因为，将U_y表示为$U(q_0,q_1,q_2)$时，不是正值二次型，如图5-8那样，在q_2方向上变得平坦．这样的回转应另行处理，所以在仅了解振动时不去讨论它，从开始就可假定$q_2(t)=0$（这也是一种约束）．

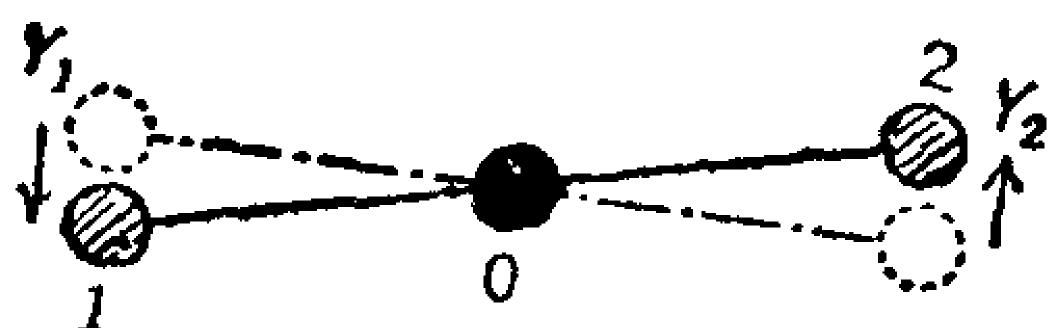


图 5-7

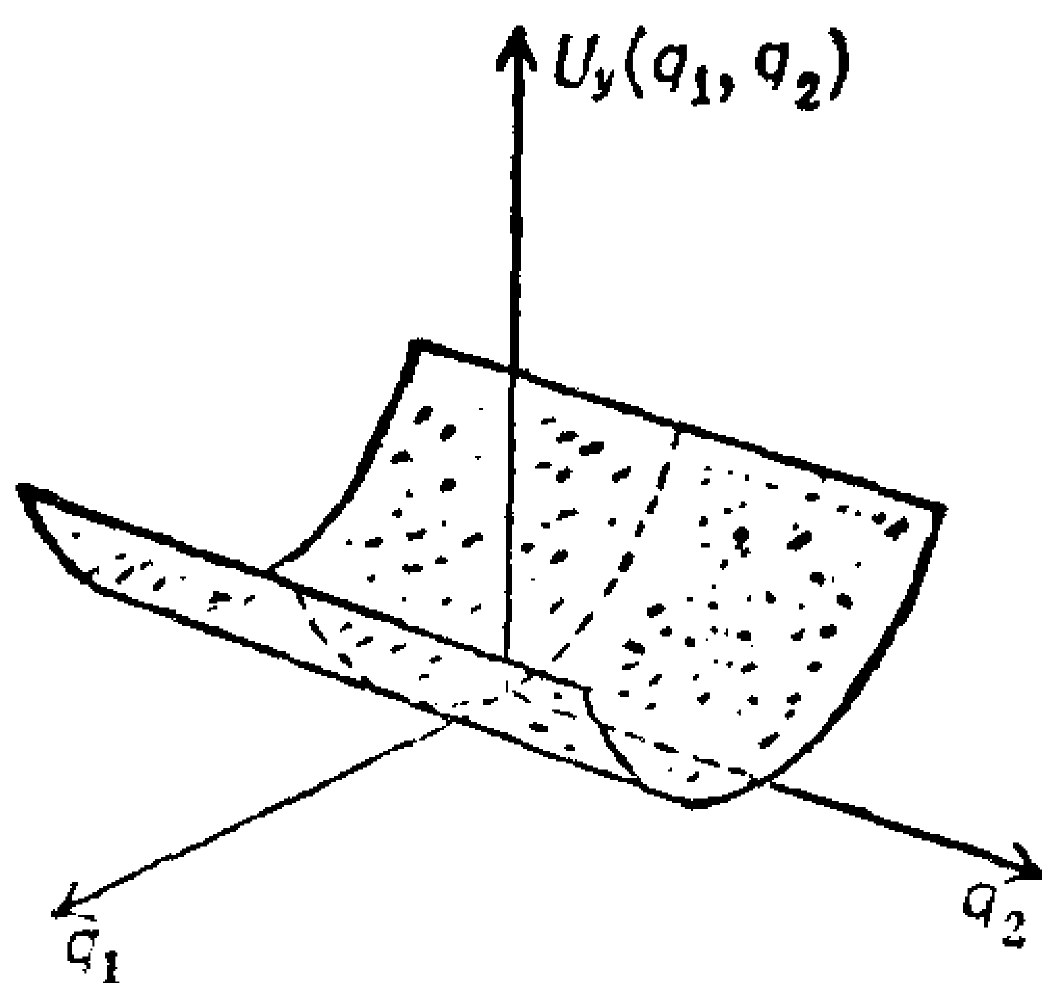


图 5-8

这样一来，所考虑的必要自由度仅有q_0和q_1．也就是说，只要计算(5.24)开头两个式子就可以了．在这种情况下(5.14b)的久期方程，成为

$$\begin{vmatrix} \omega^2-\dfrac{4k}{M} & 2k\sqrt{\dfrac{2}{Mm}} \\ 2k\sqrt{\dfrac{2}{Mm}} & \omega^2-\dfrac{2k}{m} \end{vmatrix}=0$$

解之得两个根：

$$\omega=\begin{cases} 0 & \therefore\ \omega_1=0 \\ \dfrac{4k}{M}+\dfrac{2k}{m} & \therefore\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{4k}{M}+\dfrac{2k}{m}} \end{cases}$$

还出现了恢复力为0($\omega_1=0$)的运动，那么，这到底表示什么呢？

为了看清这点，对ω_1和ω_2求解(5.14)，可知：

$$\text{对于}\omega_1=0\text{得}\qquad \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=+\sqrt{\frac{2m}{M}}$$

对于 $\omega_2=\sqrt{\dfrac{4k}{M}+\dfrac{2k}{m}}$ 得 $\dfrac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=-\sqrt{\dfrac{M}{2m}}$

因为$K_{ij}=\delta_{ij}$，矢量的内积

$$(A^{(l)}\cdot A^{(k)})=A_1^{(l)}A_1^{(k)}+A_2^{(l)}A_2^{(k)}$$

是简单的，$A^{(1)}$和$A^{(2)}$的正交性也马上可以看清．按上面方法进行规格化可得：

$$\omega_1=0:\qquad A_1^{(1)}=\sqrt{\frac{M}{M+2m}},\quad A_2^{(1)}=\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{4k}{M}+\frac{2k}{m}}:\quad A_1^{(2)}=\sqrt{\frac{2m}{M+2m}},\quad A_2^{(2)}=-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}$$

因此，按(5.18a)，(5.18b)写出主坐标时，(5.18a)变成 $Q_k(t)=\sum\limits_i A_i^{(k)}q_i(t)$，所以得到：

$$Q_1=\sqrt{\frac{M}{M+2m}}q_0+\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}q_1$$

$$Q_2=\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}q_0-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}q_1 \qquad (5.25a)$$

$$q_0=\sqrt{\frac{M}{M+2m}}Q_1+\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}Q_2$$

$$q_1=\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}Q_1-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}Q_2 \qquad (5.25b)$$

进而将q_0，q_1复原为Y_0，Y_1，Y_2时，有

$$Q_1=\frac{MY_0+m(Y_1+Y_2)}{\sqrt{m+2m}}$$

$$Q_2=\sqrt{\frac{Mm}{2(M+2m)}}\{2Y_0-(Y_1+Y_2)\}$$

所以，若考虑$q_2=Q_2=0$而$Q_1\neq0$的时候，根据

$$Y_1-Y_2=0,\qquad 2Y_0-(Y_1+Y_2)=0$$

有：

$$Y_0 = Y_1 = Y_2$$

也就是说，可以看出分子整体保持原状，形成沿y方向的平动．由于这应当也没有恢复力的作用，因此，$\omega_1 = 0$是很自然的．重心的y坐标由

$$Y_G = \frac{My_0 + m(y_1 + y_2)}{M + 2m}$$

所定义．所以，让分子整体只在y方向位移$Y_0(=Y_1=Y_2)$时，由$y_0 \to y_0 + Y_0$，$y_1 \to y_1 + Y_0$，$y_2 \to y_2 + Y_0$得到

$$Y_G \to Y_G + \frac{MY_0 + m(Y_1 + Y_2)}{M + 2m} = Y_G + \frac{Q_1}{\sqrt{M + 2m}}$$

这也可以认为Q是表示平动（重心的移动）的广义坐标．

这样，假如将回转与平移分离开来的话，作为振动自由度保留下来的只有Q_2，该Q_2的振动方式的变化表示如图5-5那样的**变角摆动**．也可看出：该拉格朗日方程为

$$\ddot{Q} = -\omega^2 Q_2 \tag{5.26}$$

圆频率由

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}} \qquad \left(k = \frac{\kappa}{a^2}\right)$$

给出．

z方向也完全与此相同，可将回转和平移分离开，同样可得到ω_2的变角振动．此两个变角振动，ω_2是共同的，故是简并的．但将其视为

$$q_0 = \sqrt{M}Y_0, \qquad q_1 = \sqrt{m}\,Y_+, \qquad q_2 = \sqrt{m}\,Y_-$$

$$q_3 = \sqrt{M}Z_0, \qquad q_4 = \sqrt{m}\,Z_+, \qquad q_5 = \sqrt{m}\,Z_-$$

这6个广义坐标构成的6维空间内的矢量时，用分量表示，则如图(5.25a)所示，与Q_2的$A^{(2)}$

$$A^{(2)} = \left(\sqrt{\frac{2m}{M + 2m}},\ -\sqrt{\frac{M}{M + 2m}},\ 0, 0, 0, 0\right)$$

相对应，z方向的变角振动可用

$$A^{(2')}=\left(0,0,0,\sqrt{\frac{2m}{M+2m}},-\sqrt{\frac{M}{M+2m}},0\right)$$

这 6 维矢量表示，所以，内积的正交性

$$(A^{(2)}\cdot A^{(2')})=0$$

就很清楚了.

$A^{(2)}$（或者其上乘以 $a\cos(\omega_2 t+\alpha)$的Q_2）是在与xy面平行平面内的变角振动. 可以使$A^{(2')}$是在与xz面平行的平面内所表示的变角振动. 那么，当然会产生这样的疑问，即与x轴平行的其它任意的平面内的同样形式的振动将变得如何呢？$A^{(2)}$与$A^{(2')}$的线性组合当然表示那样——ω_2相同——的振动. 可以指出，因组合系数的不同可表示面的倾斜情况，其它的则请读者自己去研究. 通过这个例子，也可以推测出简并是在何时产生的.

问题 4　变角振动时，C与O的位移之比将如何？

§5-6　晶格振动

取很多质量为m的重物，长度为l、弹性系数为k的弹簧. 将它们连成如图5-9那样的链状，并将其置于光滑的水平面上. 考虑使重物沿着链的长度方向产生微小振动. 由左边开始顺序将重物进行编号，设第j号重物的位移为ξ_j

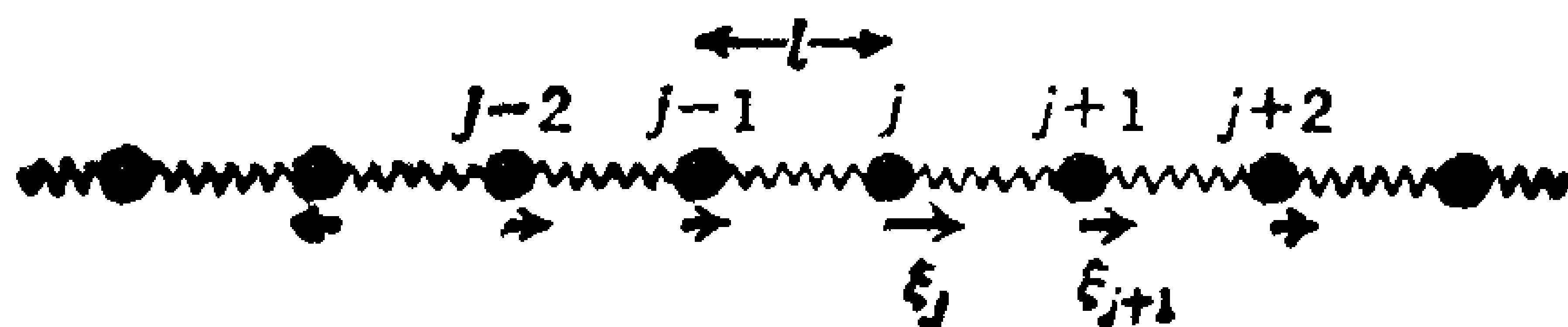


图　5-9

该系统具有的动能为

$$T=\sum_j \frac{1}{2} m\dot{\xi}_j^2 \tag{5.27}$$

弹簧具有的势能和用

$$U=\sum_j \frac{1}{2}k(\xi_{j+1}-\xi_j)^2=k\sum_j(\xi_j^2-\xi_j\xi_{j+1}) \tag{5.28}$$

表示。因此，拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\sum_j\{m\dot{\xi}_j^2-k(\xi_{j+1}-\xi_j)^2\} \tag{5.29}$$

运动方程变为

$$m\ddot{\xi}_j=-k(2\xi_j-\xi_{j+1}-\xi_{j-1}) \tag{5.30}$$

的形式. 因此，如果有

$$\xi_{j+1}(t)+\xi_{j-1}(t)\propto\xi_j(t)$$

的话，则(5.30)式将归结为谐振动的方程，所以能够简单求解.

现在，作为求复合振动的简正振动，来考虑仅有其中的第n个被激振的时候. 这是在(5.17)式中$a_n\neq 0$而除此以外的a_i全为 0 的情况. 现在，因为相当于q_1，…，q_f的是$\xi_1,\cdots,\xi_j$，所以 有：

$$\xi_j(t)=A_j^{(n)}a_n\cos(\omega_n t+\alpha_n)=A_j^{(n)}Q_n(t)$$

因此若能形成

$$A_{j+1}^{(n)}+A_{j-1}^{(n)}\propto A_j^{(n)}$$

的形式就应当可以了. 为此，利用正弦函数具有

$$\sin(j+1)\eta+\sin(j-1)\eta=2\cos\eta\sin j\eta$$

这个性质的话，若取$A_j^{(n)}\propto\sin j\eta_n$的话，似乎就可以了. 故设$C_n$为规格化常数，试取$A_j^{(n)}=C_n\sin j\eta_n$，那么就有：

$$\xi_j(t)=(C_n\sin j\eta_n)Q_n(t)$$

又，代入(5.30)式时有：

$$\ddot{Q}_n=\frac{2k}{m}(1-\cos\eta_n)Q_n$$

不难看出，将ω_n取为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k}{m}(1-\cos\eta_n)}=2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\eta_n}{2}$$

即可.

那么，怎么来确定η_n为好呢？现在，设链的两端固定，并将其用

$$\xi_0=\xi_n=0$$

表示因为当$j=0$时，$\sin j\eta_n=0$，所以$\xi_0=0$已被满足，若再有

$$N\eta_n=\pi\text{的整数倍}$$

的话，$\xi_N=0$也将被满足. 使这个整数和编号n一致起来是很便利的.

$$\eta_n=\frac{n\pi}{N}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

现在，设$n=N+\gamma$，因j也是正整数，而有：

$$\sin j\eta_{N+\gamma}=\sin j\frac{(N+\gamma)\pi}{N}=\sin\left(j\frac{\gamma\pi}{N}+j\pi\right)=(-1)^j\sin j\eta_\gamma$$

所以，将n取得大于N是没有意义的. 此外$n=N$也将使$\sin j\eta_N\equiv0$（参阅图5-10最下面）所以也不能用. 结果，能够采用的n为

$$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$$

共$N-1$个. 因为设$\xi_0=\xi_N=0$，该体系将用$\xi_1,\xi_2,\cdots,\ \xi_{N-1}$来描述，自由度为$N-1$. 因此，简正坐标也应当正好是$Q_1,Q_2,\cdots\cdots,Q_{N-1}$这$N-1$个. 所以作为上述情况正好合适. 这样可得到：

$$A_j^{(n)}=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right)\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

如果使用

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right)\sin\left(\frac{n'\pi}{N}j\right)=\frac{N}{2}\delta'_{nn}$$

的话，也可表示出正交性($n\neq n'$的时候)，也可看出规格化常数C_n可取为

$$C_n=\sqrt{\frac{2}{N}}$$

结果得到：

$$A_j^{(n)}=\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\left(\frac{n\pi}{N}\quad\right)\qquad(n=1,2,\cdots,N-1)\ (5.32)$$

于是，当只有第n个简正振动时，各重物的位移由

$$\xi_j(t)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right)Q_n(t)\tag{5.33}$$

给出．其中，因$Q_n(t)=a_n\cos(\omega_n t+\alpha_n)$，其固有频率由

$$\omega_n=2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{n\pi}{N}\tag{5.34}$$

给出．这构成两端为节点的“驻波”形式，我们取$N-1=6$并将其改为“横波”，将其“波形”(5.32)表示出来的话，则如图5-10所示．当考虑改写为

$$\sin\left(\frac{n\pi}{N}j\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{Nl}jl\right)$$

jl是从链左端到第j个重物的距离（设为x_j）时，若设长为λ_n，并全：

$$\sin\left(\frac{n\pi}{Nl}x_i\right)=\sin\frac{2\pi}{\lambda_n}x_i$$

即得

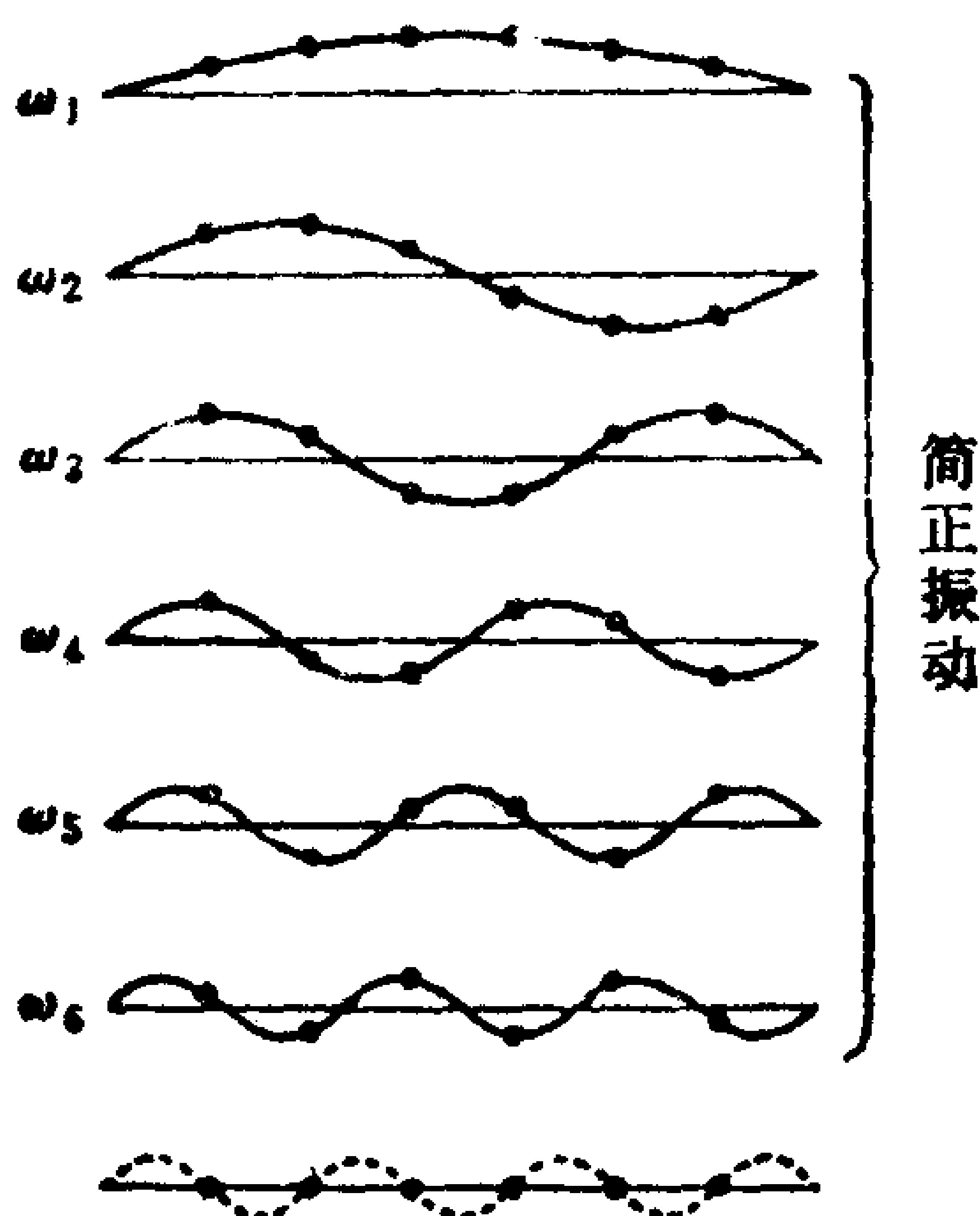


图5-10　如将向右的位移改变成为向上的位移，向左的位移改成为向下的位移的话，可将纵波翻译成横波，这样容易看清．

$$\lambda_n = \frac{2Nl}{n} \qquad (Nl\text{：链的全长})$$

图5-10正是如此．

固体结晶是原子规则的周期性排列结合而成的巨大分子（原子数～10^{23}）．这样的原子排列方式称为**晶格点阵**．晶格内原子运动是一种复合振动，可用本章的方法来处理．在此所表示的仅为由相同原子构成一维结晶的模型．即使是三维的情况，晶格振动仍是波的形式．我们介绍一维的情况是一种最为简单的例子．

§5-7　连续体的振动

在弹性理论和流体力学中，不考虑物质的原子结构，而将其作为连续体处理．据此论述各式各样的运动．其中的弹性波——在流体内传播的声波也是其中一种——与前节研究的晶格振动有密切关系．对于波长与原子间距相比大得多的波来说，将晶格看成是连续体是很好的近似．

于是，让我们来考虑前节链上，原子间距l无限小的极限．因而可做为杆的纵振动问题看待．其中，为使每单位长度的质量（线密度）

$$\rho = \frac{m}{l}$$

保持一定，m也应与l成比例的减小，因此，拉格朗日函数(5.29)改写成：

$$L = \frac{1}{2}\sum_j l\left\{\frac{m}{l}\dot{\xi}_j^2 - kl\left(\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{l}\right)^2\right\} \tag{5.35}$$

这样的话，就可将m/l改写成ρ．并且，取链的方向为x轴，即可看出：

$$\lim_{l\to 0}\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{l} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

第j个重物的位移可如同

$$\xi_j(t)\rightarrow\xi(x,t)$$

那样，转化为表示在平衡状态下处于位置x的棒某截面位移的量．应当注意x是代替j而出现的量．换言之，只不过是对棒各点的记号而已，并非广义坐标．作为广义坐标随时间而变化的量是ξ，代之"某个重物的位移"而指定"棒的某处的位移"的量是x．如果理解成$x(t)$那就错了．

那么，kl如何表示才好呢？设使长度为L_0的棒延伸x所必须的力为F，按胡克定律可表示为

$$F=e\frac{x}{L_0}$$

e是表示棒的杨氏模量乘上截面积的量．于是，将棒长从L_0伸长到$L_0+\Delta L$，所需要的功为

$$\int_0^{\Delta L}F\,dx=\frac{e}{2L_0}(\Delta L)^2=\frac{eL_0}{2}\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)^2$$

所以，可以看出：棒的每单位长度储存的弹性势能，是将其除以L_0所得的

$$\frac{e}{2}\times(\text{伸缩的比率})^2$$

若将它与连接链的弹簧的势能相比较的话，可知取$kl=e$即可．

根据以上事实(5.35)可改写成

$$L=\frac{1}{2}\sum_j l\left\{\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_j^2-e\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_j^2\right\}$$

于是，取$l\rightarrow 0$的场合正确的写出来的话，求和变成为积分($l\rightarrow dx$)，而成为下式：

$$L=\frac{1}{2}\int\left\{\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2-e\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right\}dx \tag{5.36}$$

这里所出现的

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 - e\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right\} \tag{5.37}$$

是可以看为每单位长拉格朗日函数的量，称为拉格朗日密度.

根据(5.35)建立拉格朗日运动方程，得：

$$\frac{m}{l}\ddot{\xi}_j=kl\frac{1}{l}\left(\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{l}-\frac{\xi_j-\xi_{j-1}}{l}\right)$$

右边（…）内可认为是偏离l时$\partial\xi/\partial x$的差，故可知有

$$\lim_{l\to 0}\frac{1}{l}\left(\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{l}-\frac{\xi_j-\xi_{j-1}}{l}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

因此，运动方程的极限是：

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=e\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{5.38}$$

如所周知，(5.38)为一维**波动方程**，具有速度为

$$c=\sqrt{\frac{e}{\rho}}$$

的波形式的解. 最一般性的解，应表示为对f和y可任意微分的一阶连续函数形式：

$$\xi(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct) \tag{5.40}$$

这是在$t=0$时，通过$f(x)$，$g(x)$表示出来的函数形式. 随着t增加，成为以$+c$及$-c$的速度沿$\pm x$方向运动的叠加，特别在**正弦波**情况下成为

$$\xi(x,t)=A\sin\{k_1(x-ct)+\alpha\}+B\sin\{k_2(x+ct)+\beta\}$$

设$B=A$，$k_2=k_1=k$，$ck=\omega$时成为

$$\begin{aligned}\xi(x,t)&=A[\sin(kx-\omega t+\alpha)+\sin(kx+\omega t+\beta)]\\&=2A\sin\left(kx+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\omega_n t+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

的形式，形成在任何方向都不前进的**驻波**.

在棒的两端$x=0$，L_0，为使$\xi=0$，应取$\alpha+\beta=0$，$kL_0=n\pi(n=1, 2, 3, \cdots)$.则可知：

$$\xi_n(x,t)=2A\sin\left(\frac{n\pi}{L_0}x\right)\cos(\omega_n t+\beta_n) \tag{5.41}$$

其中：

$$\omega_n=\frac{n\pi}{L_0}\sqrt{\frac{e}{\rho}} \tag{5.42}$$

将其与链的情况下(5.33)，(5.34)相比较，可以看出，若设

$$x=jl, \qquad L_0=Nl$$

则与(5.33)，(5.41)完全对应；将(5.34)的正弦函数在小角度下展开，取第一项近似：

$$2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{n\pi}{2N}\doteq 2\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{n\pi}{2N}=\sqrt{\frac{kl}{m/l}}\frac{n\pi}{2N}$$

的话，就可以归结为(5.42)．当n很小时，允许这样的近似．这一点从图5-10中可以看到，是对应于波长长的情况．在链的场合，波的速度为

$$c_n=\frac{\lambda_n\omega_n}{2\pi}=\sqrt{\frac{kl}{m/l}}\frac{2N}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2N}$$

如果n小的话：

$$c_n\to\sqrt{\frac{kl}{m/l}}=\sqrt{\frac{e}{\rho}}$$

在n大的致密波情况下，较此为小．由于波长不同，波速不同的现象——光通过棱镜分解成有色光谱的现象亦是由此引起的——称为**色散**．

本节的方法，也可以扩大到2维，3维的情况，也可改写成哈密顿形式，或以变分原理形式表示出来．

习　题

1．在天花板上用弹簧吊一质量为m的重物1，再在其下方系上一条长度和强度都相同的弹簧，吊上另一个质量为m的重物2，试分析这一体系上下方向的运动．

2．把(5.18b)代入拉格朗日函数(5.11)，证明它将变形为独立的简谐振子的拉格朗日函数之和．

3．研究§5-5中的 CO_2 分子轴线方向的运动，证明它有两个简正振动．

附　　录

习题略解

第 一 章

问题 1　设$M=m_A+m_B$

$$x_A=X-\frac{m_B}{M}R\sin\theta\cos\phi,\quad x_B=X+\frac{m_A}{M}R\sin\theta\cos\phi;$$

$$y_A=Y-\frac{m_B}{M}R\sin\theta\sin\phi,\quad y_B=Y+\frac{m_A}{M}R\sin\theta\sin\phi$$

$$z_A=Z-\frac{m_B}{M}R\cos\theta,\quad z_B=Z+\frac{m_A}{M}R\cos\theta$$

问题 2　因为$x=r\cos\theta$，$y=\sin\theta$，所以：

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta$$

还有：

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta,\quad \dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$$

故：

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{r}}=\cos\theta,\quad \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\theta}}=-r\sin\theta$$

$$\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{r}}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{\theta}}=r\cos\theta$$

问题 3　p_r：动量的矢径方向分量．

p_θ：与包含矢径和z轴二者的平面垂直的直线方向的角动量分量．

p_ϕ：角动量的z分量．

〔习　　题〕

1．使用赫伦公式，三角形PP_1P_2的面积可表示为

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{(\xi^2-l^2)(l^2-\eta^2)}$$

若令其等于$ly/2$，则马上求出：

$$y=\frac{1}{2l}\sqrt{(\xi^2-l^2)(l^2-\eta^2)}$$

设$\angle PP_2P_1=\theta$和$x=r_2\cos\theta-(l/2)$，利用余弦定理

$$r_2^2+l^2-2r_2l\cos\theta=r^2$$

计算 容易导出：

$$x=-\frac{\xi\eta}{2l}$$

利用它能得到：

$$\begin{cases} dx=\dfrac{-\eta}{2l}d\xi+\dfrac{-\xi}{2l}d\eta \\ dy=\dfrac{\xi}{2l}\sqrt{\dfrac{l^2-\eta^2}{\xi^2-l^2}}d\xi+\dfrac{-\eta}{2l}\sqrt{\dfrac{\xi^2-l^2}{l^2-\eta^2}}d\eta \end{cases}$$

由此可知，固定η，仅使ξ变化$d\xi$时，位移dr_ξ的x、y分量为

$$(dr_\xi)_x=-\frac{\eta}{2l}d\xi,\quad (dr_\xi)_y=\frac{\xi}{2l}\sqrt{\frac{l^2-\eta^2}{\xi^2-l^2}}d\xi$$

固定ξ，仅使η变化$d\eta$时，位移dr_η的分量为

$$(dr_\eta)_x=-\frac{\xi}{2l}d\eta,\quad (dr_\eta)_y=\frac{-\eta}{2l}\sqrt{\frac{\xi^2-l^2}{l^2-\eta^2}}d\eta$$

这样一来：

$$dr_\xi\cdot dr_\eta=(dr_\xi)_x(dr_\eta)_x+(dr_\xi)_y(dr_\eta)_y=0$$

故可知这两个位移正交．因此，这个曲线坐标($\xi=$恒量是椭圆群，$\eta=$恒量是双曲线群)为正交曲线坐标．

根据上面的式子，求$|dr_\xi|$和$|dr_\eta|$时，可知：

$$|dr_\xi|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-l^2}}d\xi,\qquad |dr_\eta|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{l^2-\eta^2}}d\eta$$

它们的积为面积元：

$$dS=\frac{1}{4}\frac{\xi^2-\eta^2}{\sqrt{(\xi^2-l^2)(l^2-\eta^2)}}d\xi d\eta$$

2．(a)令拉格朗日算符

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-U(r)$$

利用

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=0 \quad \therefore \quad r^2\dot{\theta}=h(\text{恒量})$$

能导出$\dot{\theta}=h/r^2$. 将其代入另一个方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=\frac{\partial L}{\partial r}=-\frac{\partial U(r)}{\partial r}+mr\dot{\theta}^2$$

时：

$$m\ddot{r}=-\frac{\partial U(r)}{\partial r}+m\frac{h^2}{r^3}$$

设其右边为

$$m\ddot{r}=-\frac{\partial}{\partial r}\left\{U(r)+\frac{mh^2}{2r^2}\right\}=-\frac{\partial}{\partial r}U_{eff}(r)$$

时，将

$$U_{eff}=U(r)+\frac{mh^2}{2r^2}$$

称为有效势能. 第二项是表观力“离心力”的“势能”.

(b) 有效势能具有极小值时，r在其附近作振动，其振幅为 0 ($\dot{r}=0$) 时为圆运动. 在$r=r_0$处达到极小时，r_0由

$$U'(r_0)=\frac{mh^2}{r^3}$$

决定.

(c) 代入$U(r)=\frac{1}{2}kr^2$时：

$$U_{eff}(r)=\frac{1}{2}kr^2+\frac{mh^2}{2r^2}$$

因此，由

$$kr_0=\frac{mh}{r_0^3}$$

可知，r_0满足$r_0^4=mh^2/k$. 但利用

$$h=r_0^2\omega$$

马上能求出 $\omega=\sqrt{k/m}$，所以：

$$周期=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3．(a)如上问那样考虑的话，圆的半径满足：

$$3kr_0^2=\frac{mh^2}{r_0^3}$$

由此，

$$p_\theta=mh=mr_0v_\theta=r_0^2\sqrt{3mKr_0}$$

动能

$$\frac{m}{2}v_\theta^2=\frac{3}{2}Kr_0^3$$

势能为 Kr_0^3，所以

$$T+U=\frac{5}{2}Kr_0^3$$

(b) 角速度为

$$\omega=\frac{v_\theta}{r_0}\sqrt{\frac{3Kr_0}{m}}$$

所以

$$周期=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{3Kr_0}}$$

(c) 设在$r=r_0+\rho$中，ρ很小，在r方向的打击力下，h不变．所以代入

$$m\ddot{r}=-3kr^2+\frac{mh^2}{r^3}$$

通过略去ρ的高次项，

$$\begin{aligned}m\ddot{\rho}&=-3Kr_0^2\left(1+\frac{2\rho}{r_0}\right)+\frac{mh^2}{r_0^3}\left(1-\frac{3\rho}{r_0}\right)\\&=-3Kr_0^2\left(\frac{2\rho}{r_0}+\frac{3\rho}{r_0}\right)\\&=-15Kr_0\rho\end{aligned}$$

因此，$\rho(t)$满足：

$$\ddot{\rho}-\frac{15Kr_0}{m}\rho$$

即可知是用 频率$\sqrt{15Kr_0/m}$的简谐振动．

$$周期=2\pi\sqrt{\frac{m}{15Kr_0}}\quad ((b)的结果的\frac{1}{\sqrt{5}})$$

第二章

问题1 在弹簧振子的运动方程(§1-5例题1)中，将弹簧的张力 $-k(r-l)$换为线的张力 $-S$时有：

$$\begin{cases} m\ddot{r}=-S+mg\cos\theta+mr\dot{\theta}^2 \\ m\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=-mgr\sin\theta \end{cases}$$

这里进一步设$r=l$时，$\ddot{r}=0$，所以得到：

$$S=mg\cos\theta+ml\dot{\theta}^2 \tag{i}$$

$$l\ddot{\theta}=-g\sin\theta \tag{ii}$$

在第二个式子上乘上$\dot{\theta}$，利用$d(\dot{\theta}^2)/dt=2\dot{\theta}\ddot{\theta}$得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\right)=-g\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

所以两边对t积分时，可得：

$$\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2=-g\int\sin\theta d\theta=g\cos\theta+常数$$

设$\theta=0$时，重物的速度为$l\omega$时，常数变为$\frac{1}{2}l\omega^2-g$，故有：

$$l\dot{\theta}^2=l\omega^2-2g(1-\cos\theta) \tag{iii}$$

将其代入(i)就有：

$$S=ml\omega^2-2mg+3mg\cos\theta$$

S的最大值是在$\theta=0$时：

$$S_m=mg+ml\omega^2$$

ω大时，($l\omega^2>4g$)，(iii)经常为正，重物应当描成圆而回转．$l\omega^2<5g$时，在圆的顶点($\cos\theta=-1$)由于变到$S<0$，所以在中途的 $\cos\theta=(2g-l\omega^2)/3g$处，线将变得完全松驰．因此，在$l\omega^2>5g$时，成为圆振子．此外，由(ii)导出(iii)的手续是求能量积分的常规手段，(iii)的$ml/2$倍无非就是能量守恒定律．

问题2 设考虑与支点o′一同运动的运动坐标系，加上了惯性力．即设：

$$y=y'+F(t)\qquad (y'=l\sin\theta)$$

由于：

$$m\ddot{y}=m\ddot{y}'+mF''(t)$$

故若张力为S，则：

$$m\ddot{y}'=-S\sin\theta-mF''(t) \tag{i}$$

将其与

$$m\ddot{x}=-S\cos\theta+mg \tag{ii}$$

联立求解.

在θ小时，$\ddot{x}=0$，设$\cos\theta=1$，则根据(ii)，$S=mg$，将其代入(i)，近似有$y'=l\theta$，$\sin\theta=\theta$.

问题 3
$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\omega^2\sin^2\alpha)$$
$$U=mgr\cos\alpha$$

所以，

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\omega^2\sin^2\alpha)-mgr\cos\alpha$$

运动方程由

$$m\ddot{r}=mr\omega^2\sin^2\alpha-mg\cos\alpha$$

给出．这可写为

$$\ddot{r}=\omega^2\sin^2\alpha\left(r-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right),$$

所以，令

$$\rho=r-\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha},\qquad \beta=\omega\sin\alpha$$

时有：

$$\ddot{\rho}=\beta^2\rho$$

作为一般解可得：

$$\rho(t)=Ae^{\beta t}+Be^{-\beta t}$$
$$\dot{\rho}(t)=\beta(Ae^{\beta t}-Be^{-\beta t})$$

即使在$t=0$处$\rho(0)=0$，$(A=B)$若$\dot{\rho}(0)\neq0$的话，由于$Ae^{\beta t}$的项，$|\rho(t)|$也将随t而剧增．因此，由$\rho(0)=\dot{\rho}(0)=0$得的解 $r=g\cos\alpha/\omega^2\sin^2\alpha$ 是不稳定的平衡.

问题 4 有$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+e\Phi=E$．由于磁场不作功，在该式当中不

出现．此外，在这种场合，(1.50)式不成立．

问题5 $$D=\frac{1}{2}k(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}k(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

所以：

$$Q_r=-\frac{\partial D}{\partial \dot{r}}=-k\dot{r},\quad Q_\theta=-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=-kr^2\dot{\theta}$$

因此：设$L=T-U(r)$，由

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=0$$

得：

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})=-kr^2\dot{\theta}$$

因面积速度由 $h=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$给出，故该式为

$$\frac{d}{dt}h=-\frac{k}{m}h \quad \therefore \quad h=h_0e^{-(k/m)t}$$

问题6 圆锥的底面为半径$l/2$的圆，底面的边缘在水平面上描出的是半径l的圆．因此，ψ增加2π时，圆锥绕ζ轴转两周．再考虑到方向，则$\dot{\phi}=-2\dot{\psi}=-2\Omega$．$\theta=\pi/3$为恒定，$\dot{\theta}=0$，所以，(2.22)成为

$$\begin{cases}\omega_x=-2\Omega\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi=-\sqrt{3}\,\Omega\cos\Omega t\\[2ex] \omega_y=-2\Omega\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi=-\sqrt{3}\,\Omega\sin\Omega t\\[2ex] \omega_z=\Omega-2\Omega\times\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$$

其中设$\phi=0$时，$t=0$．速度由

$$V=\omega\times r$$

给出．所以，将P点的r

$$\begin{cases}x=\dfrac{l}{2}\cos\phi=\dfrac{l}{2}\cos\Omega t\\[2ex] y=\dfrac{l}{2}\sin\phi=\dfrac{l}{2}\sin\Omega t\\[2ex] z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}l\end{cases}$$

借为时，可知：

$$V_x=-\frac{3}{2}l\Omega\sin\phi,\quad V_y=\frac{3}{2}l\Omega\cos\phi,\quad V_z=0$$

大小为$3l\Omega/2$，水平，在圆的切线方向(试考虑即使将上述x，y，z对t微分也得不到V_x，V_y，V_z的理由．同样理由，将V_x，V_y，V_z微分也得不到加速度)．

［习题］

1．设两根刚体棒对铅直方向的倾角为θ_1和θ_2，它们绕弹性棒的转动惯量为I_1，I_2．则

$$I_1=\frac{1}{3}M_1l_1^2,\qquad I_2=\frac{1}{3}M_2l_0^2$$

这样，动能为

$$T=\frac{1}{2}(I_1\dot\theta_1^2+I_2\dot\theta_2^2)=\frac{1}{6}(M_1l_1^2\dot\theta_1^2+M_2l_2^2\dot\theta_2^2)$$

此外，势能为

$$U=M_1g\frac{l_1}{2}(1-\cos\theta_1)M_2g\frac{l_2}{2}(1-\cos\theta_2)+\frac{K}{2}(\theta_1-\theta_2)^2$$

K为扭转的弹性系数，与a成反比例．因此，拉格朗日函数被表示为

$$L=\frac{1}{6}(M_1l_1^2\dot\theta_1^2+M_2l_2^2\dot\theta_2^2)-\frac{g}{2}[M_1l_1(1-\cos\theta_1)+M_2l_2(1-\cos\theta_2)]$$

$$-\frac{K}{2}(\theta_1-\theta_2)^2$$

设θ_1，θ_2充分小，略去高次项的话，$1-\cos\theta_i\doteq\frac{1}{2}\theta_i^2$，所以可取：

$$L=\frac{1}{6}(M_1l_1\dot\theta_1^2+M_2l_2\dot\theta_2^2)-\frac{g}{4}(M_1l_1\theta_1^2+M_2l_2\theta_2^2)-\frac{K}{2}(\theta_1-\theta_2)^2$$

由此，作为拉格朗日方程，可求出：

$$\begin{cases}\frac{1}{3}M_1l_1^2\ddot\theta_1=-\frac{g}{2}M_1l_1\theta_1-K(\theta_1-\theta_2)\\ \frac{1}{3}M_2l_2^2\ddot\theta_2=-\frac{g}{2}M_2l_2\theta_2-K(\theta_2-\theta_1)\end{cases}$$

这是一种复合振动．其求解方法可参照第五章．

2．设绕圆筒轴的转动惯量为I，则

$$I=\frac{1}{2}Ma^2 \quad (M\text{为圆筒质量})$$

(a) 如图那样定角度θ时，设平衡状态下，与最低点A相接的点为 P，运动中的接点为Q.

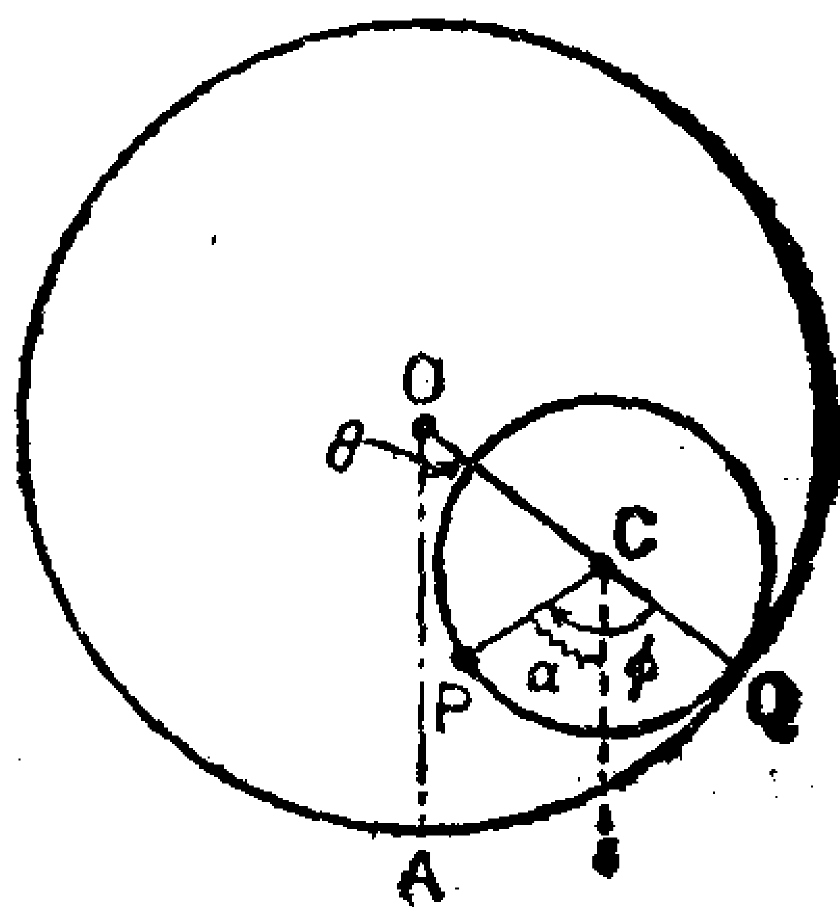


图 49

则有：

由$\widehat{PQ}=\widehat{AQ}$ $\quad a\phi=R\theta$

$$\therefore \quad \phi=\frac{R}{a}\theta$$

CP的回转角：

$$\alpha=\phi-\theta=\frac{R-a}{a}\theta$$

圆筒的动能由重心的动能及绕重心回转的动能之和给出，所以

$$T=\frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2$$

$$=\frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{4}Ma^2\left(\frac{R-a}{a}\right)^2\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\theta}^2$$

此外，对重力的势能

$$U(\theta)=(R-a)Mg(1-\cos\theta) \quad (U(0)=0)$$

因此，拉格朗日函数为

$$L=\frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\theta}^2-Mg(R-a)(1-\cos\theta)$$

(b) $$\frac{3}{2}M(R-a)^2\ddot{\theta}=-Mg(R-a)\sin\theta$$

简化得： $$\ddot{\theta}=-\frac{2g}{3(R-a)}\sin\theta$$

(c) 设$\sin\theta=\theta$，近似有

$$周期=2\pi\sqrt{\frac{3(R-a)}{2g}}$$

3．将重物位置用水平的方向为x轴、铅直方向为y轴的笛卡儿坐标表示时有：

$$x=l\sin\theta,\qquad y=a\cos\omega t+l\cos\theta$$

所以

$$\dot{x}=l\dot{\theta}\cos\theta,\quad \dot{y}=-a\omega\sin\omega t-l\dot{\theta}\sin\theta$$

因此

$$T=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+2al\omega\dot{\theta}\sin\theta\sin\omega t+a^2\omega^2\sin^2\omega t)$$

此外

$$U=mgy=mg(a\cos\omega t+l\cos\theta)$$

所以

$$L=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+2al\omega\dot{\theta}\sin\theta\sin\omega t+a^2\omega^2\sin^2\omega t)$$
$$-mg(\cos\omega t+l\cos\theta)$$

由此作成：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta}$$

整理得：

$$l\ddot{\theta}=(g-a\omega^2\cos\omega t)\sin\theta$$

第 三 章

[习题]

1．拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx$$

所以，给定$x=C(t-t_1)(t-t_2)$时，将其微分，代入得到

$$\dot{x}=2Ct-C(t_1+t_2)$$

时有：

$$L=\frac{m}{2}C^2\{4t^2-4(t_1+t_2)t+(t_1+t_2)^2\}-mgC(t-t_1)(t-t_2)$$

将其积分时，

$$S=\int_{t_1}^{t_2} Ldt=\frac{m}{6}(t_2-t_1)^3(C^2+gC)$$

C必须取使其为最小的值.

由

$$\frac{dS}{dC}=0 \quad \text{得} \quad C=-\frac{g}{2}$$

2. 代入$\theta(t)=A\sin\omega t$的话，得：

$$S=\int_0^{2\pi/\omega} L(\theta,\ \dot\theta)dt=\frac{2\pi}{\omega}\frac{ml^2}{4}\{A^2(\omega^2-\frac{g}{l})+\frac{g}{16l}A^4\}$$

可知使其为最小的A必须满足：

$$\text{由} \quad \frac{\partial S}{\partial A}=0 \quad \text{得到的} \quad \omega^2-\frac{g}{l}+\frac{g}{8l}A^2=0$$

因此，设$A\ll 1$时，可求出：

$$\omega^2=\frac{g}{l}(1-\frac{A^2}{8}) \quad \therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}(1-\frac{A^2}{16})$$

因而，振幅增加时，周期如下地增加：

$$\text{周期}=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{A^2}{16})$$

第 四 章

问题1 根据拉格朗日函数(2.19)

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot x}=m\dot x+eA_x,\quad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot y}=m\dot y+eA_y,\ p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot z}=m\dot z+eA_z$$

归纳起来写为矢量形式：

$$P=m\dot r+eA$$

问题2

$$H=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

所以

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x}\to\frac{dx}{dt}=\frac{1}{m}p_x \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}\to\frac{dp_x}{dt}=-m\omega^2x \qquad \text{(ii)}$$

由(i)得$p_x=m\dot{x}$，代入(ii)而导出当然的结果：

$$m\ddot{x}=-m\omega^2 x$$

问题3　用正则方程来证明也是同样的，但不必那样做，代表点在x方向移动速度与分子的实际速度一致，等于p_x/m. 因此，微小区域随时间变化如图那样，明显地面积不变化. 对于边缘处，将图4-4沿x轴用剪刀剪开，使下半部180°回转，将RO′与QO′连起来，使P→Q＝P→S成为一直线即可.

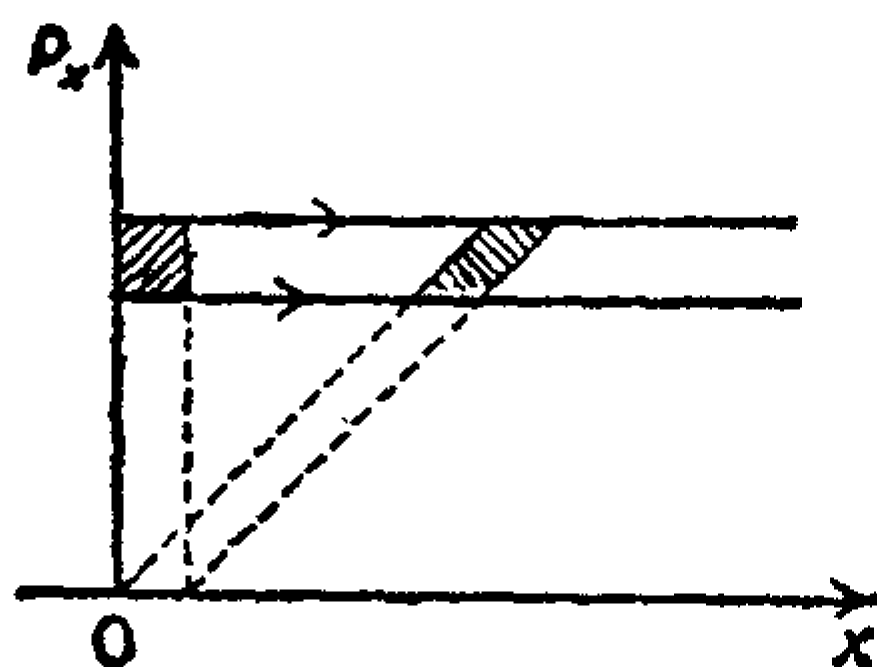


图　50

问题4　略

问题5　$P=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{q}{p}$，$Q=\dfrac{1}{2}(p^2+q^2)$，$\mathscr{H}=-\omega Q$

问题6　$Q=\dfrac{p}{m\omega}$，$P=-m\omega q$，$\mathscr{H}=\dfrac{1}{2m}P^2+\dfrac{1}{2}m\omega^2 Q$

[习题]

1．用广义动量的定义和拉格朗日方程

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\rightarrow \dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

则：

$$\begin{aligned}dH&=\sum_i(q_i dp_i+p_i d\dot{q}_i)-\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right)\\&=\sum_i(\dot{q}_i dp_i+p_i d\dot{q}_i-\dot{p}_i dq_i-p_i d\dot{q}_i)\\&=\sum(\dot{q}_i dp_i-\dot{p}_i dq_i)\end{aligned}$$

此外由于$H(q_1,\ \cdots,\ q_f,\ p_1,\ \cdots,\ p_f,\ t)$的微小变化数学上能写为

$$dH=\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right)$$

故通过与上式比较得

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

2．哈密顿算符为

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2\right)-\frac{C}{r}$$

所以，由$\dot{p}_\theta=0$ 得 $p_\theta=\alpha$(常数)．

此外，

$$\dot{p}_r=\frac{\alpha^2}{mr^3}-\frac{C}{r^2}$$

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m}$$

能量守恒定律的式子为

$$E=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{\alpha^2}{2mr^2}-\frac{C}{r}$$

在圆运动($\dot{p}_r=0$)时有$r=r_0=\alpha^2/Cm$，所以，研究与其相近的运动时，设

$$r=r_0+\Delta r$$

能够略去Δr的高次项．这样有：

$$\dot{p}_r=-\frac{m^3C^4}{\alpha^6}(r-r_0)$$

$$E=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{m}{2}\left(\frac{mC^2}{\alpha^3}\right)^2(r-r_0)^2-\frac{mC^2}{2\alpha^2}$$

将其与一维谐振子的场合(§4-3)比较时，可以看出有

$$x\to r-r_0$$

$$p_x\to p_r$$

$$E\to E+\frac{mC^2}{2\alpha^2}$$

$$\omega\to \frac{mC^2}{\alpha^3}$$

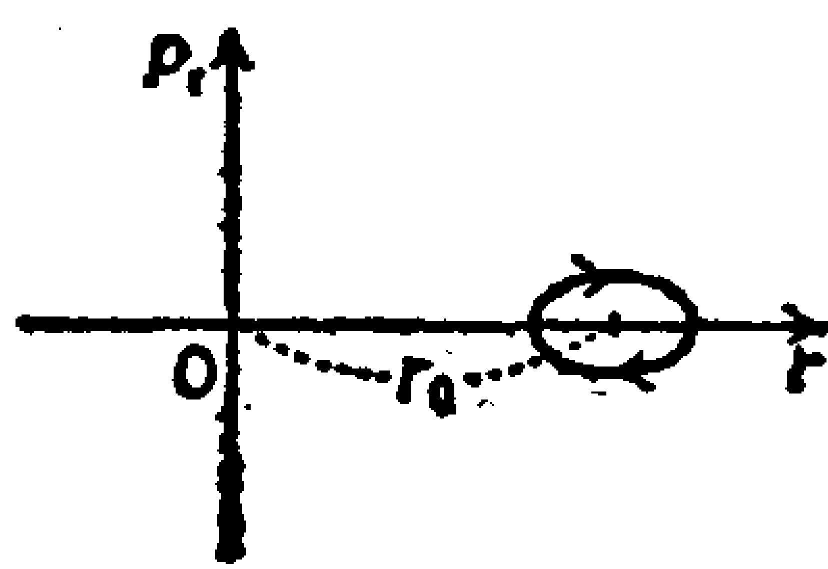
那样的对应关系．因此，相空间中的r、p_r部分，如图那样呈椭圆．

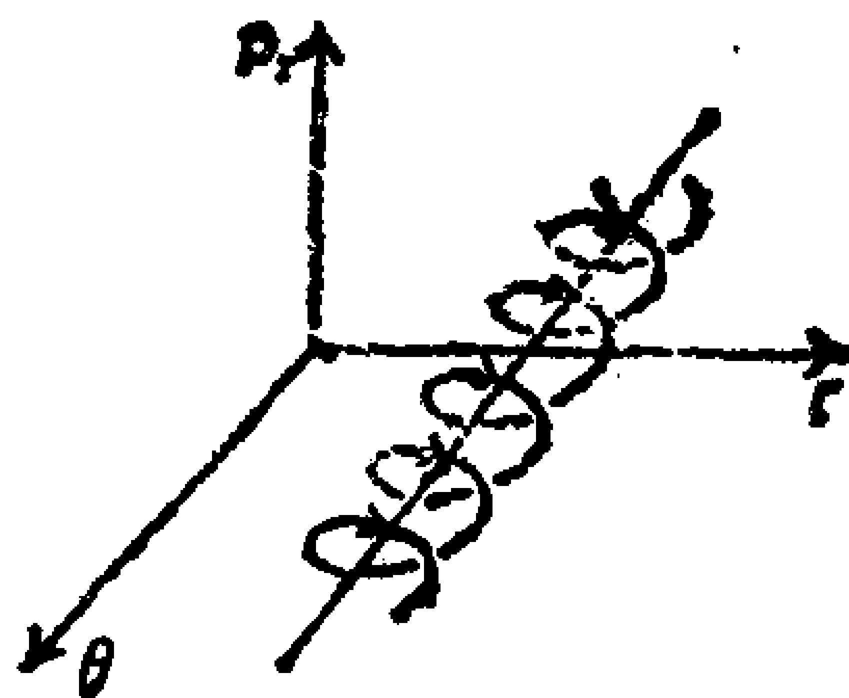
p_θ是常数($=\alpha$)，$p_\theta=mr^2\dot{\theta}$，所以

$$\dot{\theta}\doteq\frac{\alpha}{mr_0^2}$$

因此，考虑相空间中r，θ，p_r 的三维的部分时，可以看出成为螺旋状的

“运动”.





3. 如§4-6所处理的那样(图4-6), 在形成相空间内的圆运动的场合, 角速度恒定, 所以, 不言自明, 刘维定理成立. 原来的$x-p_x$空间单纯是将其在纵横方向上缩小或者扩大, 所以面积仍然守恒.

4. 略

5. 由第一式:

$$e^Q=\frac{\sin p}{q} \qquad \therefore \quad q=e^{-Q}\sin p$$

代入第二式

$$P=e^{-Q}\cos p$$

与(4.26)式对比时, 可知是由母函数

$$W=e^{-Q}\cos p$$

构成的正则变换.

6. 将x, y, z设为q_1, q_2, q_3, 将r, θ, ϕ看作Q_1, Q_2, Q_3的话, 有:

$$p_1=p_x,\ p_2=p_y,\ p_3=p_z$$

$$P_1=p_r,\ P_2=p_\theta,\ P_3=p_\phi$$

可知给出的W变为$W(p, Q)$的形式. 因此. 应用(4.26)即可:

$$x=-\frac{\partial W}{\partial p_x}=r\sin\theta\cos\phi$$

$$y=-\frac{\partial W}{\partial p_y}=r\sin\theta\sin\phi$$

$$z=-\frac{\partial W}{\partial p_z}=r\cos\theta$$

$$p_r=-\frac{\partial W}{\partial r}=p_x\sin\theta\cos\phi+p_y\sin\theta\sin\phi+p_z\cos\theta$$

$$p_\theta=-\frac{\partial W}{\partial \theta}=p_x r\cos\theta\cos\phi+p_y r\cos\theta\sin\phi-p_z r\sin\theta$$

$$p_\phi=-\frac{\partial W}{\partial\phi}=-p_x r\sin\theta\sin\phi+p_y r\sin\theta\cos\phi$$

7．哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$$

所以与(4.41)相当的是：

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=2mE$$

为了分离变数，令S为

$$S=X(x)+Y(y)+Z(z)$$

代入上式而得

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dy}\right)^2+\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2=2mE$$

左边的各项必须为常数，所以：

$$\frac{dX}{dx}=a,\quad \frac{dY}{dy}=b,\quad \frac{dZ}{dz}=c$$

因此

$$S=ax+by+cz,\quad W=ax+by+cz-Et$$

常数似乎有a，b，c，E四个，但由于有

$$2mE=a^2+b^2+c^2$$

的关系，任何一个均可用其它三个表示，独立的只有三个．设如同(4.43)那样采用E，b，c，认为$a=\sqrt{2mE-b^2-c^2}$时，(4.43)为

$$p_x=a,\quad p_y=b,\quad p_z=c \tag{i}$$

$$\beta_1=\frac{\partial a}{\partial E}x-t=\frac{m}{a}x-t \tag{ii}$$

$$\beta_2=\frac{\partial a}{\partial b}x+y=-\frac{b}{a}x+y \tag{iii}$$

$$\beta_3=\frac{\partial a}{\partial c}x+z=-\frac{c}{a}x+z \tag{iv}$$

令：

$$a=mv_x,\quad b=mv_y,\quad c=mv_z$$

的话，(ii)为　　$x=v_xt+$常数

代入后，(iii)为　　$y=v_yt+$常数

(iv)为　　$z=v_z t+$常数

不用说，E 为

$$E=\frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$$

8．取铅直向上为z轴，哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz$$

所以决定S的方程为

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+mgz=E$$

为分离变数令：

$$S=X(x)+Y(y)+Z(z)$$

与[7]同样：

$$\frac{dX}{dx}=a,\quad \frac{dY}{dy}=b,\quad \frac{dZ}{dz}=\sqrt{2m(c-mgz)}$$

得到：

$$E=\frac{1}{2m}(a^2+b^2)+c$$

由此，

$$X=ax,\quad Y=by,\quad Z=\int\sqrt{2m(c-mgz)}dz$$

所以

$$S=ax+by+\int\sqrt{2m(c-mgz)}\,dz$$

根据(4.43)

$$p_x=a,\quad p_y=b,\quad p_z=\sqrt{2m(c-mgz)}$$

将c看为α_1，将E，a，b当作独立的积分常数．

这样有：

$$c=E-\frac{1}{2m}(a^2+b^2)\qquad\therefore\quad 2mc=2mE-a^2-b^2$$

所以得：

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial E}-t=\int\frac{m\,dz}{\sqrt{2m(c-mgz)}}-t=-\frac{\sqrt{2m(c-mgz)}}{mg}-t\qquad\text{(i)}$$

$$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial a}=x-\int\frac{a\,dz}{\sqrt{2m(c-mgz)}}=x+\frac{a}{m^2g}\sqrt{(2m(c-mgz)}\qquad\text{(ii)}$$

$$\beta_3=\frac{\partial S}{\partial b}=y-\int\frac{b dz}{\sqrt{2m(c-mgz)}}=y+\frac{a}{m^2 g}\sqrt{2m(c-mgz)} \quad \text{(iii)}$$

将其改为普通的记号，令

$$a=mv_x, \quad b=mv_y$$

时，

$$c=E-\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)$$

成为z方向的能量. 将(i)变形的话，容易得：

$$z=-\frac{g}{2}t^2+v_0 t+z_0$$

v_0，z_0是代替c与β_1出现的常数. 此外，将(i)代入(ii)和(iii)的话得：

$$x=x_0+v_x t, \quad y=y_0+v_y t$$

第五章

问题 1 略

问题 2 拉格朗日函数为

$$L=\frac{ml^2}{2}(2\dot\theta_1^2+2\dot\theta_1\dot\theta_2+\dot\theta_2^2)-\frac{mgl}{2}(2\theta_1^2+\theta_2^2)$$

所以

$$(K_{ij})=\begin{pmatrix}2ml^2 & ml^2\\ ml^2 & ml^2\end{pmatrix}, \quad (C_{ij})=\begin{pmatrix}2mgl & 0\\ 0 & mgl\end{pmatrix}$$

特征方程(将全体除上ml^2，设$\gamma=g/l$)为

$$\begin{vmatrix}2\omega^2-2\gamma & \omega^2\\ \omega^2 & \omega^2-\gamma\end{vmatrix}=0$$

由此

$$\omega^2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pm1}\gamma=(2\mp\sqrt{2})\gamma$$

所以 $\omega_1=\sqrt{(2-\sqrt{2})\gamma}$，　$\omega_2=\sqrt{(2+\sqrt{2})\gamma}$

问题 3 将(5.18b)中i→j的结果代入(5.12)时得：

$$\sum_j\sum_k K_{ij}A_j^{(k)}\ddot Q_k(t)+\sum_j\sum_k C_{ij}A_j^{(k)}Q_k(t)=0$$

由(5.14)有：

$$\sum_j C_{ij}A_j^{(k)} = \sum_j K_{ij}\omega_k^2 \ A_j^{(k)}$$

所以，将其代入时有：

$$\sum_j \sum_k K_{ij}A_j^{(k)}[\ddot{Q}_k(t)+\omega_k^2 Q_k(t)]=0$$

将其乘上$A_i^{(l)}$取$\sum_i$时，通过将(5.15)和(5.16)归纳的

$$\sum_i \sum_j K_{ij}A_i^{(l)} \ A_j^{(k)} = \delta_{lk}$$

有：

$$\sum_k \delta_{lk}[\ddot{Q}_k(t)+\omega_k^2 Q_k(t)]=0$$

即

$$\ddot{Q}_l(t)+\omega_l^2 Q_l(t)=0$$

问题4　因$q_2=0$，$Q_1=0$，$Q_2\neq 0$，所以：

根据　　$Y_1-Y_2=0$，$MY_0+m(Y_1+Y_2)=0$

得：

$$Y_1=Y_2=-\frac{M}{2m}Y_0(\text{0 和C是相反方向位移})$$

[习题]

1．设弹簧的常数为k，重物离平衡点的位移为x_1，x_2。

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)$$

$$U=\frac{1}{2}k\{x_1^2+(x_2-x_1)^2\}$$

所以设 $\sqrt{m}\ x_1=q_1$，　$\sqrt{m}\ x_2=q_2$，$k/m=\kappa$，得：

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}\kappa\{q_1^2+(q_2-q_1)^2\}$$

取下侧弹簧的伸长为变数时，在T中出现交叉项，这样不能有$K_{ij}=\delta_{ij}$，所以很麻烦，还是避开为好．

拉格朗日方程为

$$\ddot{q}_1=-\kappa(2q_1-q_2),\ \ \ddot{q}_2=-\kappa(q_2-q_1)$$

有：

$$(K_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad (C_{ij})=\begin{pmatrix}2\kappa & -\kappa\\ -\kappa & \kappa\end{pmatrix}$$

所以特征方程为

$$\begin{vmatrix}\omega^2-2\kappa & \kappa\\ \kappa & \omega^2-\kappa\end{vmatrix}=0,\ \text{所以}\ \omega_1^2=\frac{\kappa}{2}(3-\sqrt{5}),\ \omega_2^2=\frac{\kappa}{2}(3+\sqrt{5})$$

对其规格化的$A^{(1)}$，$A_{(2)}$为

$$A^{(1)}=\left(\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},\ \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)$$

$$A^{(2)}=\left(\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},\ -\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)$$

简正坐标为

$$Q_1=\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,q_1+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,q_2$$

$$=\sqrt{\frac{m}{10+2\sqrt{5}}}\{2x_1+(\sqrt{5}+1)x_2\}$$

$$Q_2=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,q_1-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,q_2$$

$$=\frac{m}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\{2x_1-(\sqrt{5}-1)x_2\}$$

2．(5.18)式为$q_i=\sum_i A_i^{(k)}Q_k$，　因此$\dot{q}_i=\sum_k A_i^{(k)}\dot{Q}_k$，所以用

(5.15)，(5.16)可知：

$$T=\frac{1}{2}\sum_{ij}K_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}\sum_{l,k}\sum_{i,j}K_{ij}A_i^{(l)}A_j^{(k)}\dot{\theta}_l\dot{\theta}_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l,k}\delta_{lk}\dot{Q}_l\dot{Q}_k=\frac{1}{2}\sum_k\dot{Q}_k^2$$

此外，对U可引用§5-4的(i)得：

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j}C_{ij}q_iq_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{l,k}C_{ij}A_i^{(l)}A_j^{(k)}Q_lQ_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\sum_{i,j}K^{ij}\omega_k^2A_i^{(l)}A_j^{(k)}Q_lQ_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l,k}\delta_{lk}\omega_k^2\ Q_lQ_k=\frac{1}{2}\sum_k\omega^2\ Q_k^2$$

所以

$$L=T-U=\frac{1}{2}\sum_k\dot{Q}^2-\frac{1}{2}\sum_k\omega^2\ Q_k^2=\sum_k\left(\frac{1}{2}\dot{Q}_k^2-\frac{1}{2}\omega_k^2\ Q_k^2\right)$$

3. 设对于C-O键伸缩的弹性系数为λ时.

$$L=\frac{1}{2}\{M\dot{X}_0^2+m(\dot{X}_1^2+\dot{X}_2^2)\}-\frac{\lambda}{2}\{(X_1-X_0)^2+(X_2-X_0)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{M\dot{X}_0^2+m(\dot{X}_1^2+\dot{X}_2^2)\}-\frac{\lambda}{2}\{2X_0^2+X_1^2+X_2-2X_0(X_1+X_2)\}$$

$$q_0=\sqrt{M}\,X_0,\quad q_1=\sqrt{\frac{m}{2}}(X_1+X_2),\quad q_2=\sqrt{\frac{m}{2}}(X_1-X_2)$$

有：

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_0^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{\lambda}{2}\left\{\frac{2}{M}q_0^2+\frac{1}{m}(q_1^2+q_2^2)-\sqrt{\frac{8}{Mm}}q_0q_1\right\}$$

所以，q_2为独立的谐振子，q_0和q_1形成关联振动．对q_2的拉格朗日方程

$$\ddot{q}_2=-\frac{\lambda}{m}q_2\ ,\ \text{所以}\ \omega_2=\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$$

关于q_1，q_2成为

$$\ddot{q}_0=-\frac{2\lambda}{M}q_0+\sqrt{\frac{2}{Mm}}\lambda q_1$$

$$\ddot{q}_1=\sqrt{\frac{2}{Mm}}\lambda q_0-\frac{\lambda}{m}q_1$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}\omega^2-\frac{2\lambda}{M} & \sqrt{\frac{2}{Mm}}\lambda\\ \sqrt{\frac{2}{Mm}}\lambda & \omega^2-\frac{\lambda}{m}\end{vmatrix}=0$$

其根为

$$\omega_0^2=0\ ,\qquad \omega_1^2=\left(\frac{2}{M}+\frac{1}{m}\right)\lambda$$

对它们求$A^{(0)}$，$A^{(1)}$时，

$$\omega_0=0:\quad A_1^{(0)}=\sqrt{\frac{M}{M+2m}},\quad A_2^{(0)}=\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2\lambda}{M}+\frac{\lambda}{m}};\quad A_1^{(1)}=\sqrt{\frac{2m}{M+2m}},\quad A_2^{(1)}=-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}$$

因此

$$Q_0=\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\,q_0+\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}\,q_1=\frac{MX_0+m(X_1+X_2)}{\sqrt{M+2m}}$$

为重心运动(平移运动).

$$Q_1=\sqrt{\frac{2m}{M+2m}}\,q_0-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\,q_1=\sqrt{\frac{Mm}{2(M+2m)}}\{2X_0-(X_1+X_2)\}$$

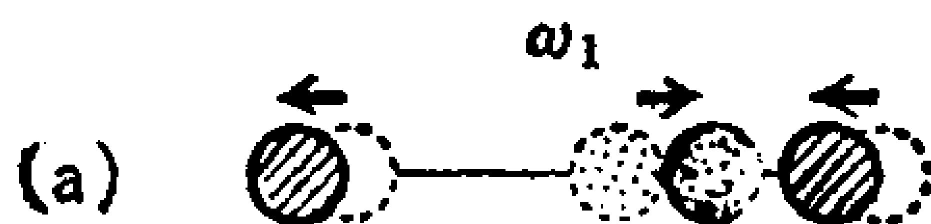
表示如图的(a)那样的伸缩振动($X_1=X_2=-(M/2m)X_0$).

此外

$$q_2=\sqrt{\frac{m}{2}}(X_1-X_2)$$

表示中央的C不动，左右的氧原子反向等距离运动，或者靠近C、或者远离C的伸缩振动．$\omega_1>\omega_2$.

以上的计算与正文的§5-5综合起来时，可以知道，CO_2分子具有的九个自由度被重新组合为x，y，z方向的平移运动，绕垂直于分子轴两条直线(相互垂直)的回转，两种伸缩振动，简并的两个变角振动这合计九个自由度．没有绕分子轴的回转是因为CO_2为直线状分子，各个原子当作质点来对待的缘故．





附录

基本物理常数

物 理 量	符号		单 位
光 速	c	299792458	ms^{-1}
真空介电常数	ε_0	8.854187817	$10^{-12}F/m^{-1}$
真空导磁率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$	NA^{-2}
万有引力常数	G	6.67259(85)	$10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$
基本电荷	e	1.6017733(49)	$10^{-19}C$
普朗克常数	h	6.6260755(40)	$10^{-34}Js$
	$\hbar$	1.05457266(63)	$10^{-34}Js$
阿伏伽德罗常数	N_A	6.0221367(36)	$10^{23}mol^{-1}$
摩尔体积(理想气体)	V_m	22.41410(19)	L/mol
气体常数(一摩尔)	R	8.314510(70)	$Jmol^{-1}K^{-1}$
玻尔兹曼常数, R/N_A	k	1.380658(12)	$10^{-23}JK^{-1}$
电子质量	m_e	0.91093897(54)	$10^{-30}kg$
电子静止能	m_ec^2	0.51099906(15)	MeV
质子质量	m_p	1.6726231(10)	$10^{-27}kg$
中子质量	m_n	1.6749286(10)	$10^{-27}kg$
玻尔半径	a_0	0.529177249(24)	$10^{-10}m$
玻尔磁子, $eh/2m$	μ_B	9.2740154(31)	$10^{-24}JT^{-1}$
电子磁矩	μ_e	9.2847701(31)	$10^{-24}JT^{-1}$
质子磁矩	μ_p	1.41060761(47)	$10^{-26}JT^{-1}$

注：圆括弧中的数字为给定值的一个标准差的不确定度。

ISBN 7-303-00428-9/O·89　　定价：1.40　元

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等学校教学用书　理论物理基础系列教程　分析力学　第二册
作者＝（日）小出昭一郎著　鲍重光译
页数＝１６０
ＳＳ号＝１１０２３３２５
出版日期＝１９８９年０５月第１版